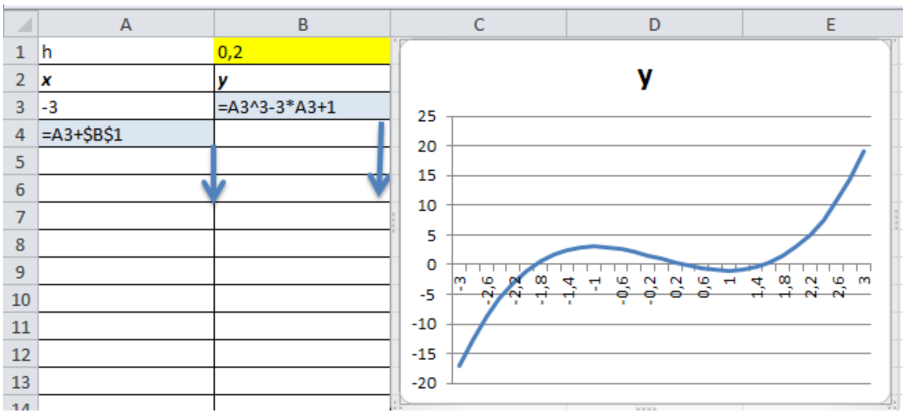
ОБРАЗЕЦ БИЛЕТА К ЗАЧЁТУ ПО ИНФОРМАТИКЕ С РЕШЕНИЕМ (ДЛЯ ЗАЧЁТА MIN – 10 БАЛЛОВ!)

Задание 1

1. Построить график функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-3;3]$ с шагом $h = 0,2$ (0,5 балла).
2. С точностью 0,0001 найти корень нелинейного уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ на отрезке $[1,1;2]$, используя **<u>один из двух</u>** методов приближённых вычислений:
   a) метод деления отрезка пополам (1 балл);
   b) метод касательных (Ньютона) (2 балла).
3. С помощью **<u>одного из методов</u>** приближённых вычислений найти корень нелинейного уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$ на отрезке $[1,1;2]$, используя код VBA MS Excel (5 баллов).
4. Проверить найденное решение с помощью надстройки MS Excel Поиск решения (1 балл).

Решение

1. Построение графика функции $y = x^3 - 3x + 1$ на отрезке $[-3;3]$ с шагом $h = 0,2$



2. Теоретические сведения

Теорема. Если $[a;b]$ - отрезок изоляции корня уравнения $f(x) = 0$, то методом деления отрезка пополам можно найти единственный корень ξ уравнения $f(x) = 0$ с заданной точностью ε.

a) <u>алгоритм метода деления отрезка пополам</u>

Если $f\left(x = \frac{a+b}{2}\right) = 0$, то x - искомый корень. Если $f\left(x = \frac{a+b}{2}\right) \neq 0$, то из отрезков $\left[a; x = \frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[x = \frac{a+b}{2}; b\right]$ выбирают для последующего деления тот, для которого выполняется теорема 1.1 (т.е. имеющий разные знаки функции на концах). Его вновь называют отрезком $[a;b]$ (рис. 1).

Приближения x_n (здесь $n = 1, 2, \ldots$ - номер итерации) с заданной точностью ε вычисляют до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $\Delta = |x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$, $n = 2, 3, 4, \ldots$. Тогда искомый корень $\xi = x_n \pm \varepsilon$.

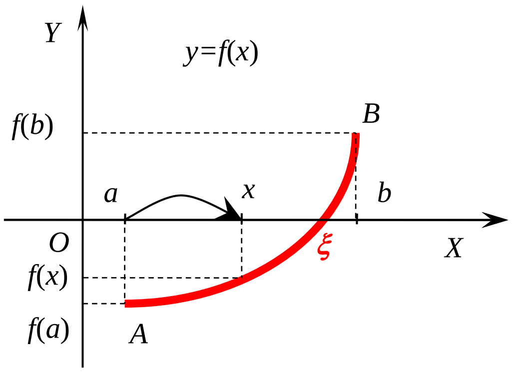


Рис.1
Графическая интерпретация метода деления отрезка пополам

Таблица метода деления отрезка пополам в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			**Метод деления отрезка пополам**							
2	***x^3-3*x+1=0***							***eps=***	0,001	
3	***n***	***a***	***b***	***x***	***f(a)***	***f(b)***	***f(x)***	***f(a)*f(x)***	**Δ**	***Примечание***
4	1	1,100	2,000	1,550	-0,969	3,000	0,074	-0,072		
5	2	1,100	1,550	1,325	-0,969	0,074	-0,649	0,629	0,225	go
6	3	1,325	1,550	1,438	-0,649	0,074	-0,342	0,222	0,113	go
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
12	9	1,529	1,532	1,531	-0,013	0,001	-0,006	0,000	0,002	go
13	10	1,531	1,532	1,532	-0,006	0,001	-0,002	0,000	0,001	stop

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1			**Метод деления отр**	**езка попо**	**лам**					
2		*x^3-3*x+1=0*						*eps=*	0,001	
3	***n***	***a***	***b***	***x***	***f(a)***	***f(b)***	***f(x)***	***f(a)*f(x)***	**Δ**	***Примечание***
4	1	1,1	2	=(B4+C4)/2	=B4^3-3*B4+1			=E4*G4		
5	=A4+1	=ЕСЛИ(H4<0;B4;D4)	=ЕСЛИ(H4<0;D4;C4)						=ABS(D5-D4)	=ЕСЛИ(I5<=$I$2;"stop";"go"
6										
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
12										
13				=(B13+C1)						

Ответ: $\xi = 1,532 \pm 0,001$.

b) алгоритм метода касательных (Ньютона)

В качестве приближённого значения корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке изоляции $[a;b]$ принимается абсцисса точки пересечения касательной к графику кривой $f(x)$ в точке $x_n \in [a;b]$. Далее из точки $(x_n, f(x_n))$ проводится новая касательная, за новое приближение принимается точка пересечения этой касательной с осью *OX*. Итерационный процесс останавливается, когда отклонение между соседними приближениями не достигнет заданной точности.

В зависимости от знака выражений $f(a)f''(a)$ и $f(b)f''(b)$ построение приближений к корню по методу касательных имеет два варианта выбора начального приближения, изображенных на рис. 2а и 2б:

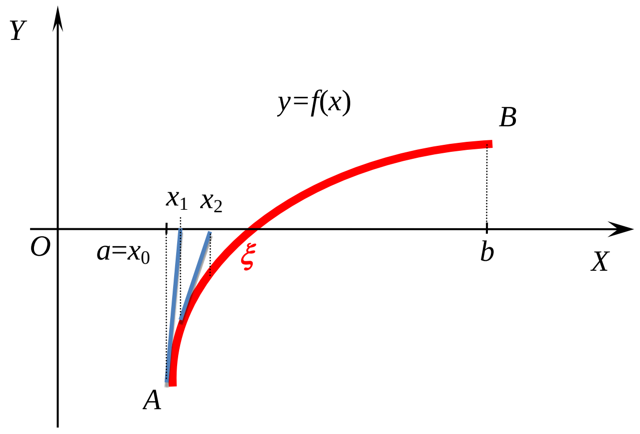


Рис. 2а

Графическая интерпретация
метода касательных, $f(a)f''(a)>0$, $x_0=a$

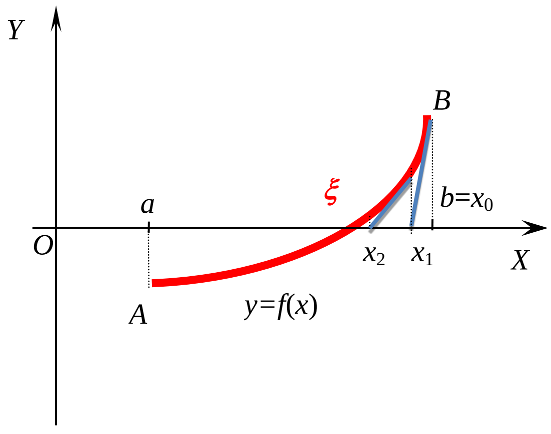


Рис. 2б

Графическая интерпретация
метода касательных, $f(b)f''(b)>0$, $x_0=b$

Пусть $f(a)f''(a)>0$, тогда $a=x_0$. Абсцисса точки пересечения касательной, проведённой к кривой $f(x)$ в точке x_0, с осью *OX* находится из системы:

$$\left.\begin{aligned}&f(x)-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\\&f(x)=0\end{aligned}\right\}.$$

В результате получается первое приближение – точка пересечения касательной с осью *OX*:

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Теорема Пусть $[a;b]$ - отрезок изоляции корня уравнения $f(x)=0$ ($f(x)\in C^1[a;b]$, $f(a)f(b)<0$, $f'(x)\neq 0$, $f''(x)\neq 0$, $\forall x\in[a;b]$). Исходя из начального приближения $x_0\in[a;b]$, удовлетворяющего условию

$$f(x_0)f''(x_0)>0,$$

методом касательных (Ньютона) можно найти единственный корень ξ уравнения $f(x)=0$ с заданной точностью ε, используя итерационную формулу:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},\ n=1,2,\ldots \tag{2}$$

Если $\Delta=|x_n-x_{n-1}|\le\varepsilon,\ n=1,2,\ \ldots$, то искомый корень равен $\xi=x_n\pm\varepsilon$.

Таблица метода касательных в MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1			**Метод касательных (Ньютона)**				
2	***x^3-3*x+1=0***					***eps=***	0,001
3		x	$f(x)$	$f''(x)$	$f(x)*f''(x)$	***Примечание***	
4	a	1,1	-0,969	6,600	-6,395		
5	b	2	3,000	12,000	36,000	x0	
6							
7	n	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)/f'(x)$	Δ	***Примечание***
8	0	2,000	3,000	9,000	0,333		
9	1	1,667	0,630	5,333	0,118	0,333	go
10	2	1,549	0,068	4,195	0,016	0,118	go
11	3	1,532	0,001	4,045	0,000	0,016	go
12	4	1,532	0,000	4,042	0,000	0,000	stop

	A	B	C	D	E	F	G
1			**Метод касат**	**ельных**	**(Ньютона)**		
2	***x^3-3*x+1=0***					*eps=*	**0,001**
3		x	$f(x)$	$f''(x)$	$f(x)*f''(x)$	***Примечание***	
4	a	**1,1**	=B4^3-3*B4+1	=6*B4	=C4*D4	=ЕСЛИ(E4>0;"x0";" ")	
5	b	2					
6							
7	n	x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)/f'(x)$	Δ	***Примечание***
8	0	=B5	=B8^3-3*B8+1	=3*B8^2-3	=C8/D8		
9	=A8+1	=B8-E8				=ABS(B9-B8)	=ЕСЛИ(F9<=$G$2;"stop";"go")
10							
11							
12		=B11-E					

Ответ: $\xi = 1,532 \pm 0,001$.

3. Код VBA MS Excel

```
Function fun(x As Double) As Double
fun = x ^ 3 - 3 * x + 1
End Function
Function fun1(x As Double) As Double 'Первая производная'
fun1 = 3 * x ^ 2 - 3
End Function
Function fun2(x As Double) As Double 'Вторая производная'
fun2 = 6 * x
End Function
```

```
Private Sub Bis() 'Метод деления отрезка пополам'
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim x As Double
Dim eps As Double
a = 1.1
b = 2
eps = 0.0001
While Abs(a - b) >= eps
x = (a + b) / 2
If fun(a) * fun(x) < 0 Then
b = x
Else
a = x
End If
Wend
MsgBox x
End Sub
```

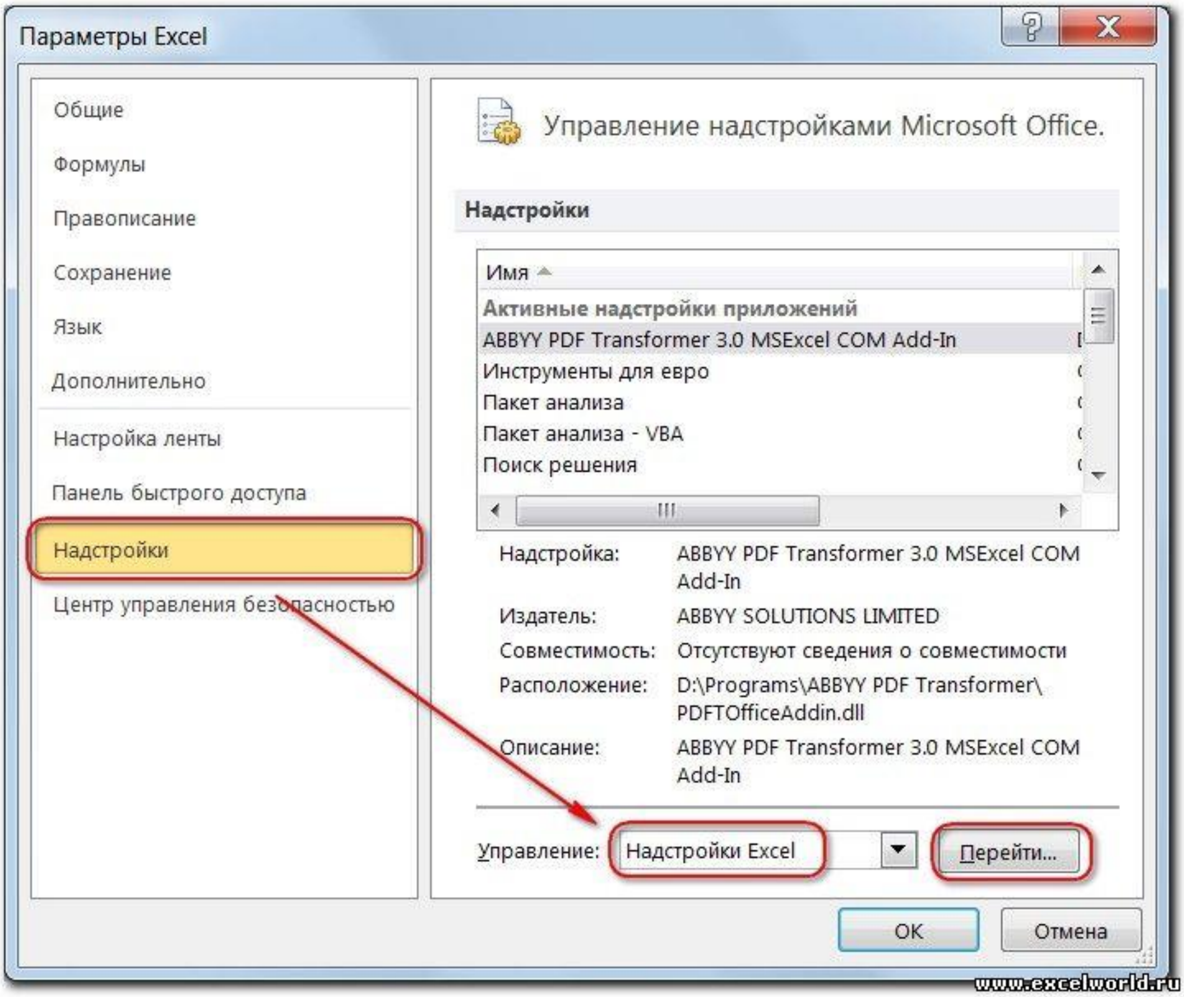
```
Private Sub Newton() 'Метод касательных'
Dim a As Double
Dim b As Double
Dim x As Double
Dim xn As Double
Dim eps As Double
a = 1.1
b = 2
eps = 0.0001
'Выбор начального приближения'
If fun(a) * fun2(a) > 0 Then
xn = a
Else
xn = b
End If
'Итерационный процесс'
Do
x = xn
xn = x - fun(x) / fun1(x)
Loop While Abs(xn - x) >= eps
MsgBox x
End Sub
```

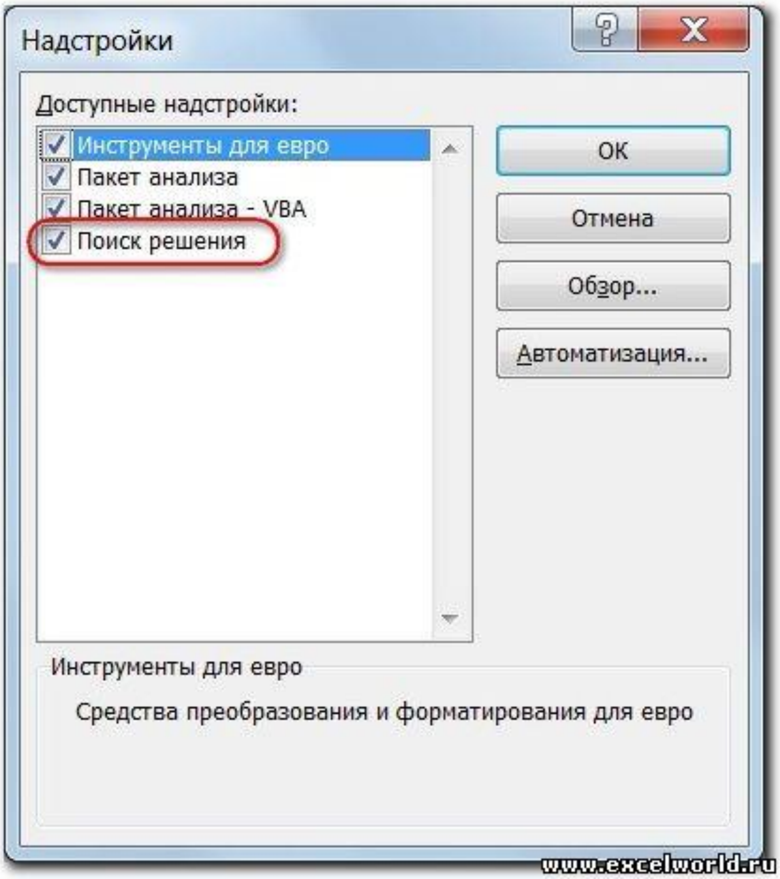
4. Доступ к команде *Поиск решения* (*Решатель*) реализован через пункт меню *Сервис/Поиск решения*. Если Вы раньше не использовали **Поиск решения**, то Вам потребуется установить соответствующую надстройку.

Сделать это можно так:

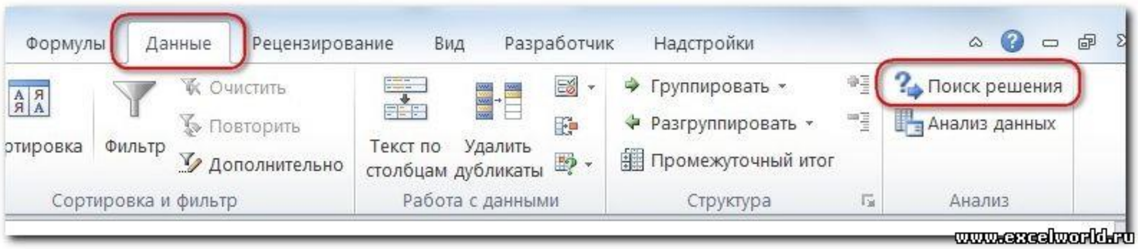
для версий старше Excel 2007 через команду меню **Сервис/Надстройки;**

начиная с Excel 2007 через диалоговое окно **Параметры Excel**





Начиная с версии Excel 2007 кнопка для запуска **Поиска решения** появится на вкладке **Данные**.



Задачи, которые можно решать с помощью *Поиска решения*, в общей постановке формулируются так:

Найти: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такие, что: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \{\max, \min, \text{value}\}$ при ограничениях: $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)\{>, <, \geq, \leq, =\}\text{value}$

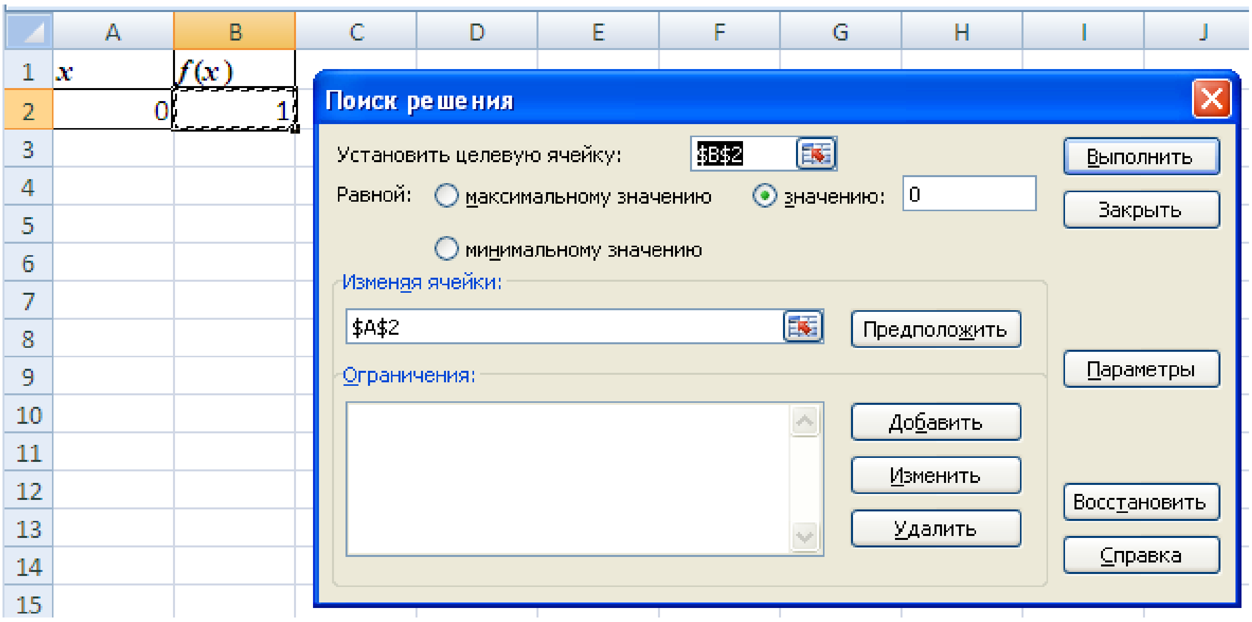
Искомые переменные - ячейки рабочего листа Excel - называются регулируемыми ячейками. Целевая функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называемая иногда просто целью, должна задаваться в виде формулы в ячейке рабочего листа. Эта формула может содержать функции, определенные пользователем, и должна зависеть (ссылаться) от регулируемых ячеек. В момент постановки задачи определяется, что делать с целевой функцией. Возможен выбор одного из вариантов:

- найти максимум целевой функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- найти минимум целевой функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$;
- добиться того, чтобы целевая функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имела фиксированное значение: $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a$.

Функции $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются ограничениями. Их можно задать как в виде равенств, так и неравенств. На регулируемые ячейки можно наложить дополнительные ограничения: неотрицательности и/или целочисленности, тогда искомое решение ищется в области положительных и/или целых чисел.

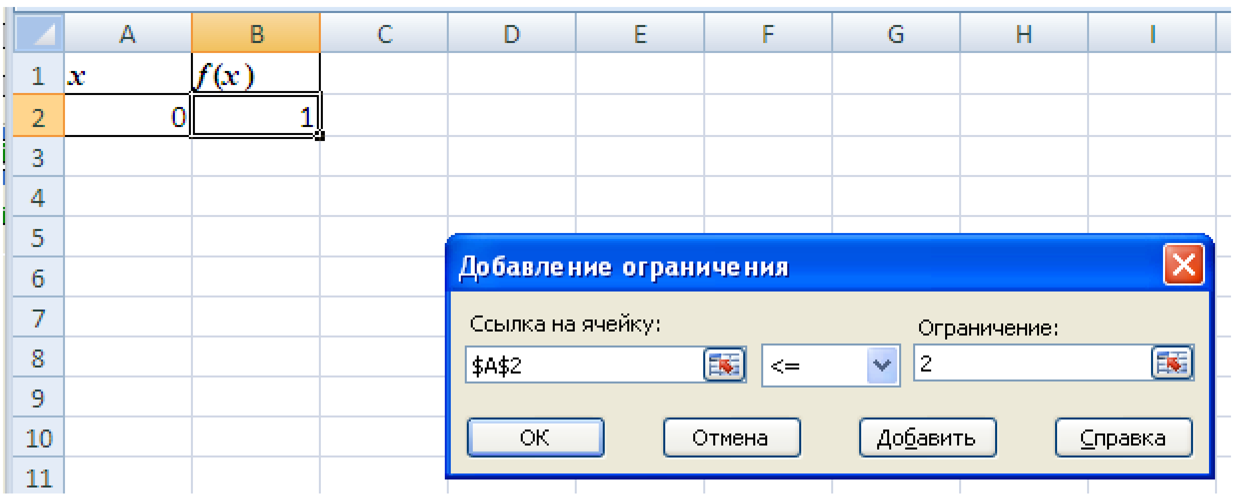
Под эту постановку попадает самый широкий круг задач оптимизации, в том числе решение различных уравнений и систем уравнений, задачи линейного и нелинейного программирования. Такие задачи обычно проще сформулировать, чем решать. И тогда для решения конкретной оптимизационной задачи требуется специально для нее сконструированный метод. *Решатель* имеет в своем арсенале мощные средства решения подобных задач: метод обобщенного градиента, симплекс-метод, метод ветвей и границ.

Найдем корень нелинейного уравнения $x^3-3x+1=0$ на отрезке $[1{,}1;2{,}0]$ с помощью надстройки *Поиск решения.*

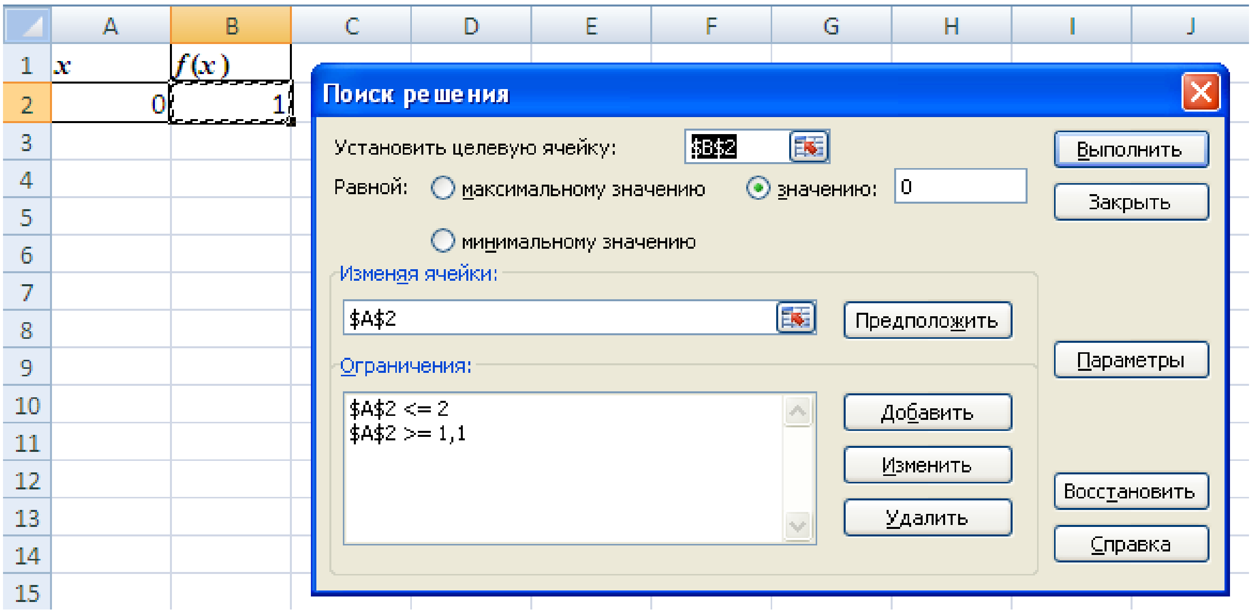


После открытия диалога *Поиск решения* необходимо выполнить следующие действия:

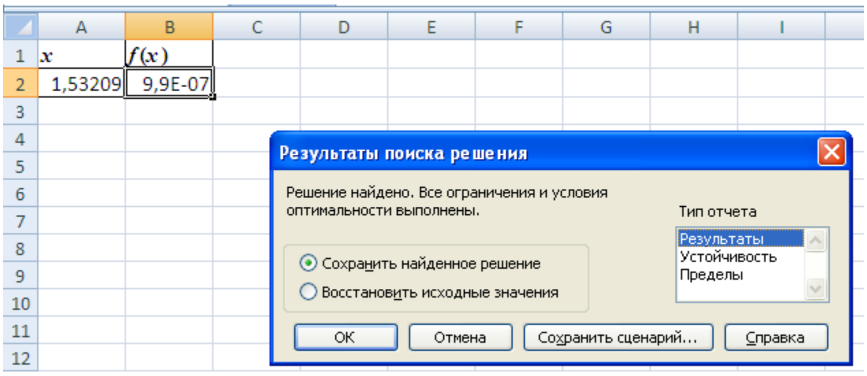
1) в поле *Установить целевую ячейку* ввести адрес ячейки, содержащей формулу для вычисления значений оптимизируемой функции, в нашем примере целевая ячейка - это B2, а формула в ней имеет вид: =A2^3-3*A2+1;
2) для максимизации значения целевой ячейки, установить переключатель максимальному значению в положение 8, для минимизации используется переключатель минимальному значению, в нашем случае устанавливаем переключатель в положение значению и вводим значение 0;
3) в поле *Изменяя ячейки* ввести адрес изменяемой ячейки, т.е. аргумента x целевой функции $f(x)$ (A2). Для автоматического поиска всех влияющих на решение ячеек используется кнопка *Предположить*;
4) в поле *Ограничения* с помощью кнопки *Добавить* ввести все ограничения, которым должен отвечать результат поиска: для нашей задачи зададим ограничения на изменение значений независимой переменной x (ячейка A2), т.е. границы отрезка $[1{,}1;2{,}0]$, на котором ищется решение уравнения $x^3-3x+1=0$.



5) для запуска процесса поиска решения нажать кнопку *Выполнить*.



6) для сохранения полученного решения необходимо использовать переключатель *Сохранить найденное решение* в открывшемся окне диалога *Результаты поиска решения*. После чего рабочий лист примет вид, представленный на рисунке.



Отчёт по результатам поиска решения уравнения можно сделать в трёх вариантах: *Результаты*, *Устойчивость* и *Пределы*.

Отчет по результатам содержит три таблицы: в первой приведены сведения о целевой функции до начала вычисления, во второй - значения искомых переменных, полученные в результате решения задачи, в третьей - результаты оптимального решения для ограничений. Отчет по пределам содержит информацию о том, в каких пределах значения изменяемых ячеек могут быть увеличены или уменьшены без нарушения ограничений задачи. Для каждой изменяемой ячейки этот отчет содержит оптимальное значение, а также наименьшие значения, которые ячейка может принимать без нарушения ограничений.

Выбираем *Результаты* и получаем отчёт:

Microsoft Excel 12.0 Отчет по результатам
Рабочий лист: [Книга1]Лист1
Отчет создан: 09.04.2014 11:23:13

Целевая ячейка (Значение)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$B$2	f(x)	1	9,88878E-07

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
$A$2	x	0	1,532089131

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
$A$2	x	1,532089131	$A$2<=2	не связан.	0,467910869
$A$2	x	1,532089131	$A$2>=1.1	не связан.	0,432089131

Отчет по результатам 1 | Лист1 | Лист2 | Лист3

Задание 2

1. Функция y задана таблично. Найти коэффициенты интерполяционного канонического многочлена (1 балл).

X	-1	0	2	3
Y	-11	-3	7	21

2. Вычислить приближённое значение $y(1)$, используя интерполяцию каноническим многочленом (0,5 балла).
3. Коэффициенты полученного канонического многочлена проверить, построив полиномиальный тренд по заданным точкам, указав его уравнение на диаграмме в MS Excel (0,5 балла).
4. Дана таблица значений функции $f(x)=\sqrt{x}$ с верными цифрами. По заданным значениям построить интерполяционный многочлен Лагранжа (1 балл).

X	1	2	4
Y	1,000	1,414	2,000

5. Вычислить приближённое значение $f(3)$, используя построенный интерполяционный многочлен Лагранжа (0,5 балла).
6. Определить абсолютную погрешность вычисления $f(3)$ и верные значащие цифры (1 балл).

Решение

1. Поскольку число узлов равно четырём, степень интерполяционного канонического многочлена будет на единицу меньше, чем число узлов, т.е. 3: $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x\ +a_0$. Остаётся найти коэффициенты a_3, a_2, a_1, a_0.

Вычисления коэффициентов канонического многочлена лучше сразу проводить в электронных таблицах MS Excel с помощью обратной матрицы, поскольку в матричной форме система линейных уравнений для определения коэффициентов канонического многочлена $P_3(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x\ +a_0$

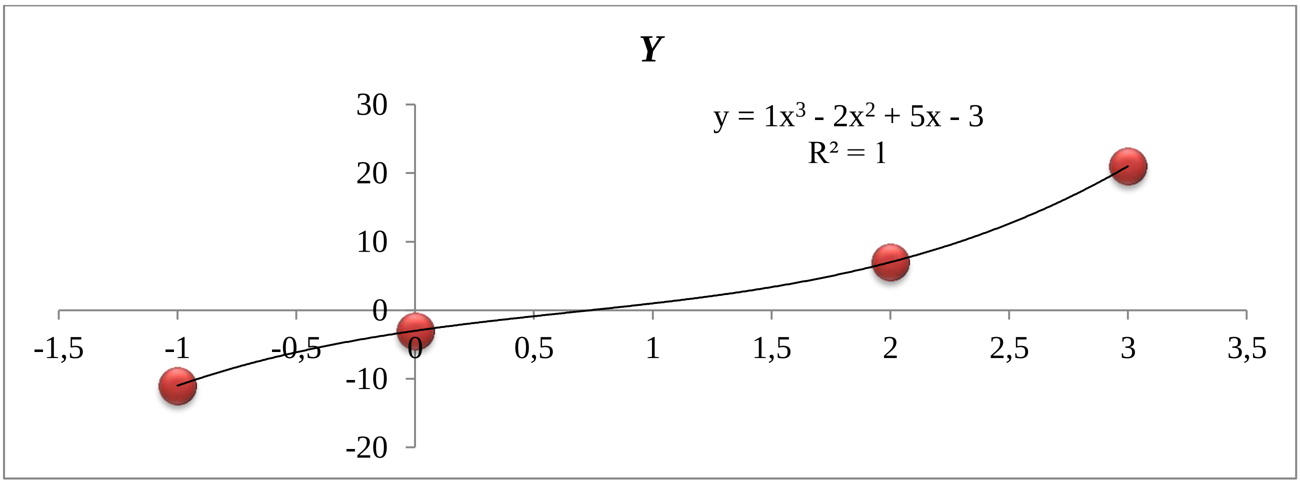
имеет вид: $XA=Y$, где $X=\begin{pmatrix} x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_3^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_3^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \end{pmatrix}$, $\quad A=\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\quad Y=\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*X*	*Y*							
2	-1	-11							
3	0	-3							
4	2	7							
5	3	21							
6									
7		-1	1	-1	1				
8	*X*	0	0	0	1				
9		8	4	2	1				
10		27	9	3	1				
11									
12		-0,083333333	0,166666667	-0,166666667	0,083333333			*a0*	1
13	X^{-1}	0,416666667	-0,666666667	0,333333333	-0,083333333		$A=X^{-1}Y=$	*a1*	-2
14		-0,5	0,166666667	0,5	-0,166666667			*a2*	5
15		0	1	0	0			*a3*	-3
16									
17	*x*=*	1							
18	*y*=*	1							

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	*X*	*Y*							
2	-1	-11							
3	0	-3							
4	2	7							
5	3	21							
6									
7		=D7^3	=D7^2	=A2	1				
8	*X*				1				
9					1				
10					1				
11									
12		=МОБР(B7:E10)						*a0*	=МУМНОЖ(B12:E15;B2:B5)
13	X^{-1}		F2+ctrl+shift+Enter				$A=X^{-1}Y=$	*a1*	
14								*a2*	F2+ctrl+shift+Enter
15								*a3*	
16									
17	*x*=*	1							
18	*y*=*	=$I$15*B17^3+$I$14*B17^2+$I$13*B17+$I$12							

2. Приближённое значение $y(1)$ вычисляется при подстановке x в полученный многочлен $P_3(x)=-3x^3+5x^2-2x\ +1$ значения $x=1$ (см таблицу MS Excel): $y(1)=1$.

3. Коэффициенты полученного канонического многочлена подтверждаются построением в MS Excel Полиномиального тренда степени 3 по точечной диаграмме с указанием его уравнения.



4. Интерполяционный многочлен Лагранжа по трём узлам: $L_2(x)=\dfrac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot y_0+\dfrac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot y_1+\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot y_2$.

По условию $x_0 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$; $y_0 = 1{,}000$, $y_1 = 1{,}414$, $y_2 = 2{,}000$.

Построим произведение разностей $(x-1)(x-2)(x-4)$.

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} \cdot 1{,}000 + \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} \cdot 1{,}414 + \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot 2{,}000 =$$

$$= \frac{x^2-6x+8}{3} \cdot 1{,}000 + \frac{x^2-5x+4}{(-2)} \cdot 1{,}414 + \frac{x^2-3x+2}{6} \cdot 2{,}000 = -0{,}0403 \cdot x^2 + 0{,}5350 \cdot x + 0{,}5053.$$

5. $L_2(3) = -0{,}0403 \cdot 3^2 + 0{,}5350 \cdot 3 + 0{,}5053 = 1{,}7473$.

6. Оценка погрешности вычисления: $\Delta_{L_n(x)} = \dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(x^* - x_i\right)\right|$, где $M_{n+1} = \max\limits_{[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$.

$n+1 = 3$ - число узлов, $x^* = 3$.

$$f(x) = \sqrt{x};\ f^{(1)}(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0{,}5 \cdot x^{-0{,}5};$$

$$f^{(2)}(x) = \left(0{,}5 \cdot x^{-0{,}5}\right)' = -0{,}25 \cdot x^{-1{,}5};\ f^{(3)}(x) = \left(-0{,}25 \cdot x^{-1{,}5}\right)' = 0{,}375 \cdot x^{-2{,}5}.$$

$$M_3 = \max_{[1;4]}\left|\left(\sqrt{x}\right)^{(3)}\right| = \max_{[1;4]}\left|\frac{0{,}375}{x^{2{,}5}}\right| = \left.\frac{0{,}375}{x^{2{,}5}}\right|_{x=1} = 0{,}375.$$

$$\Delta_{L_3(x)} = \frac{M_3}{3!} \cdot \left|\prod_{i=0}^{2}(3-x_i)\right| = \frac{0{,}375}{3!} \cdot \left|(3-1)(3-2)(3-4)\right| = \frac{0{,}375}{6} \cdot 2 = 0{,}125 \approx 0{,}2.$$

Значение с учётом погрешности: $L_2(3) = 1{,}75 \pm 0{,}2$.

Задание 3

1. Определить параметры линейной эмпирической функции $F_{\text{лин}}(x) = a_1 x + a_0$ по экспериментальным данным, представленным в таблице с помощью статистической функции ЛИНЕЙН MS Excel (0,5 балла).

2. Методом наименьших квадратов определить параметры линейной $F_{\text{лин}}(x)$ и нелинейной $F_{\text{нелин}}(x)$ эмпирической функции (**<u>будет дана только одна!</u>**) по экспериментальным данным, представленным в таблице (1 балл):

   a) параболической функции $F_{\text{нелин}}(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$;

   b) экспоненциальной функции $F_{\text{нелин}}(x) = ae^{bx}$;

   c) логарифмической функции $F_{\text{нелин}}(x) = a\ln x + b$;

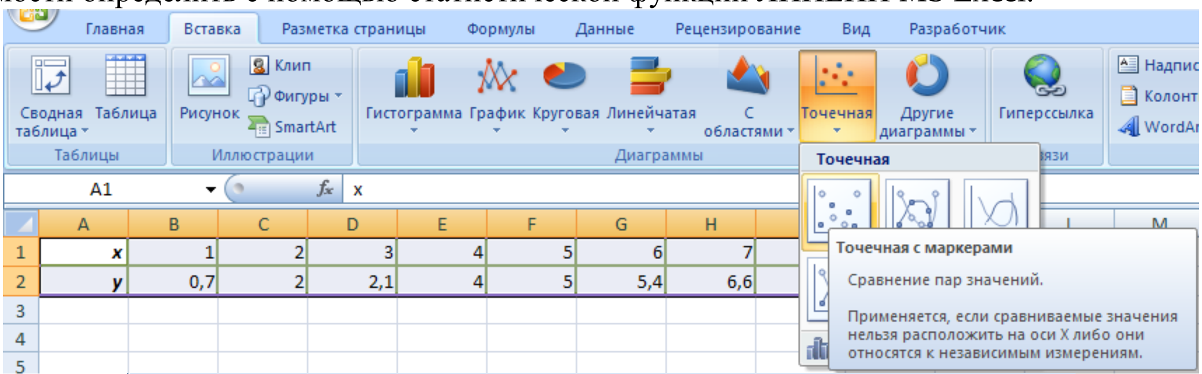
   d) степенной функции $F_{\text{нелин}}(x) = ax^b$.

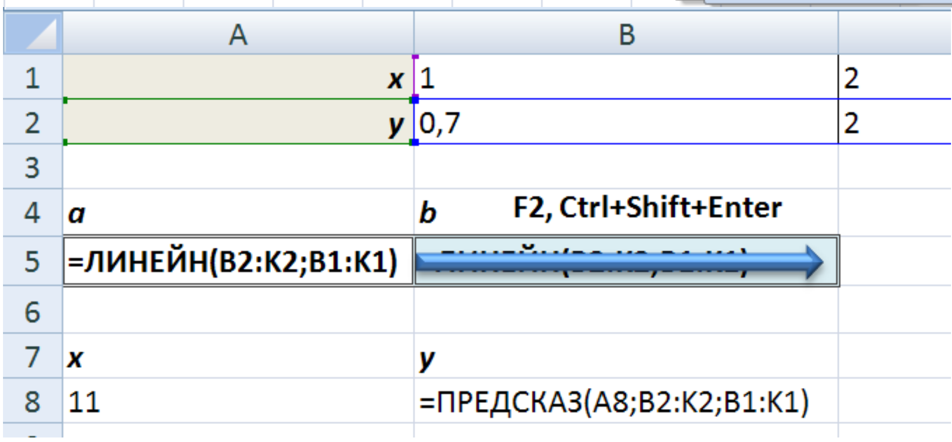
4. На диаграмме с экспериментальными данными построить графики полученных эмпирических зависимостей $F_{\text{лин}}(x)$ и $F_{\text{нелин}}(x)$ (0,5 балла).

5. Выбрав наиболее подходящую эмпирическую зависимость, найти прогнозное значение $F(x^*)$ (1 балл).

Решение

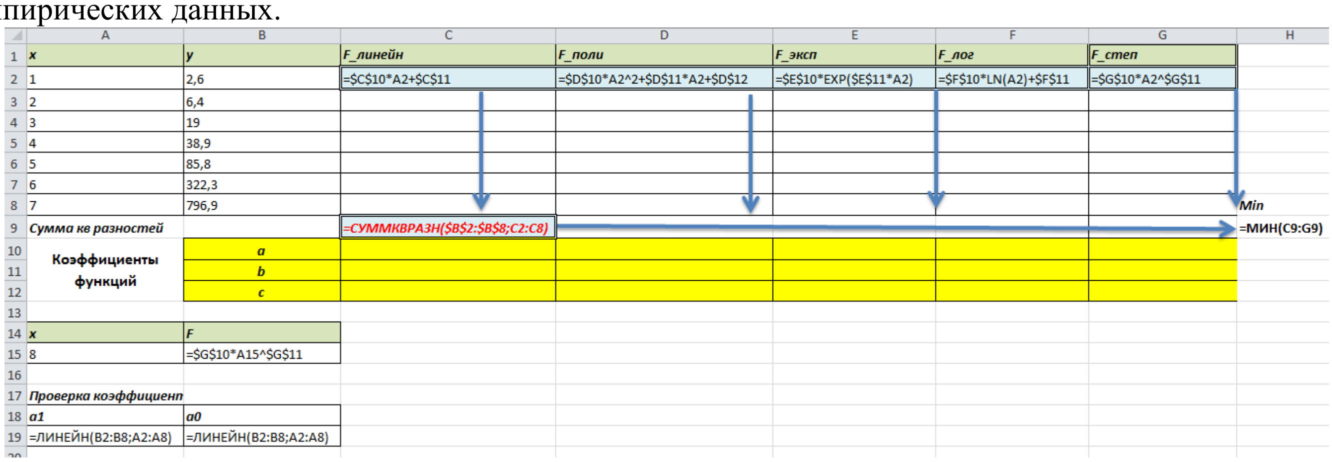
1. Ввести двумерный массив данных (x_i, y_i), $i = \overline{1,7}$ в таблицу MS Excel. Параметры линейной зависимости определить с помощью статистической функции ЛИНЕЙН MS Excel.





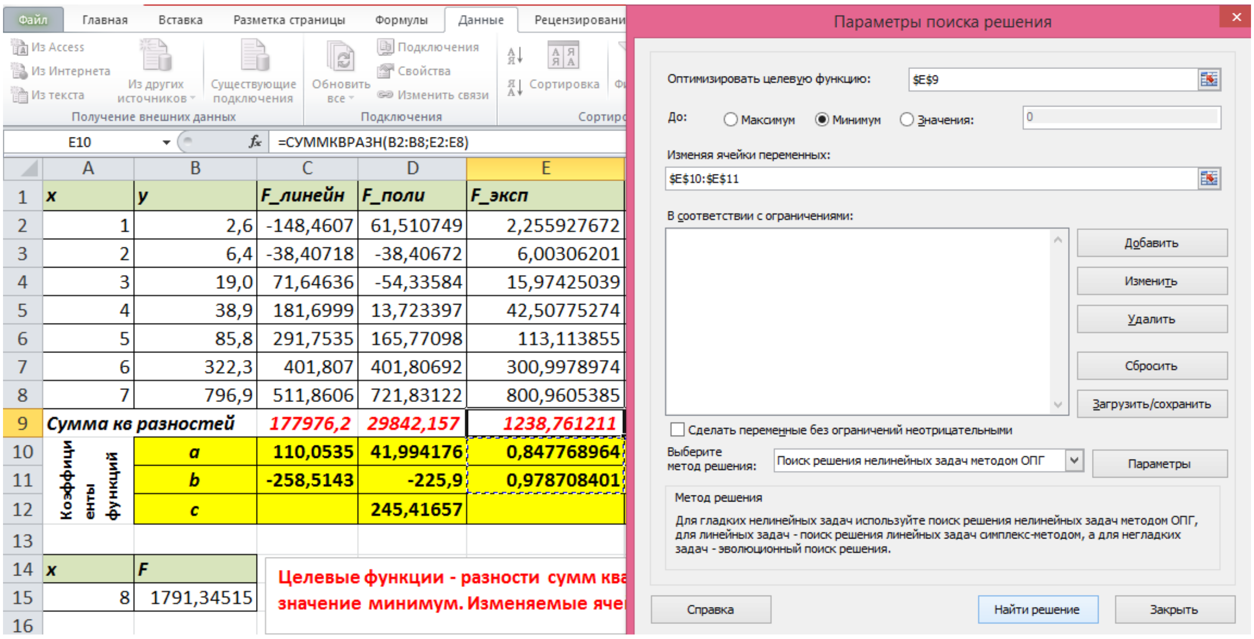
2. Поиск числовых параметров эмпирической зависимости $F(x)$ сводится к решению задачи поиска минимального значения метрики $\rho(\mathbf{y},\mathbf{F}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - F(x_i)\right)^2}$. Требуется сформировать массивы предполагаемой линейной и нелинейной эмпирических зависимостей параметры линейной $F_{\text{лин}}(x)$ и нелинейной $F_{\text{нелин}}(x)$ эмпирической функции, используя абсолютные ссылки на параметры

функций (пусть ячейки с этими параметрами пока не заполнены). Далее сформировать сумму квадратов разностей значений линейной и нелинейной эмпирических функций и соответствующих эмпирических данных.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	y	F_линейн	F_поли	F_эксп	F_лог	F_степ	
2	1	2,6	=$C$10*A2+$C$11	=$D$10*A2^2+$D$11*A2+$D$12	=$E$10*EXP($E$11*A2)	=$F$10*LN(A2)+$F$11	=$G$10*A2^$G$11	
3	2	6,4						
4	3	19						
5	4	38,9						
6	5	85,8						
7	6	322,3						
8	7	796,9						Min
9	Сумма кв разностей		=СУММКВРАЗН($B$2:$B$8;C2:C8)					=МИН(C9:G9)
10	Коэффициенты функций	a						
11		b						
12		c						
13								
14	x	F						
15	8	=$G$10*A15^$G$11						
16								
17	Проверка коэффициен							
18	a1	a0						
19	=ЛИНЕЙН(B2:B8;A2:A8)	=ЛИНЕЙН(B2:B8;A2:A8)						

С помощью Надстройки MS Excel *Поиск решения* провести минимизацию целевой функции - суммы квадратов разностей для линейной и нелинейной зависимости, используя в решении метод ОПГ.



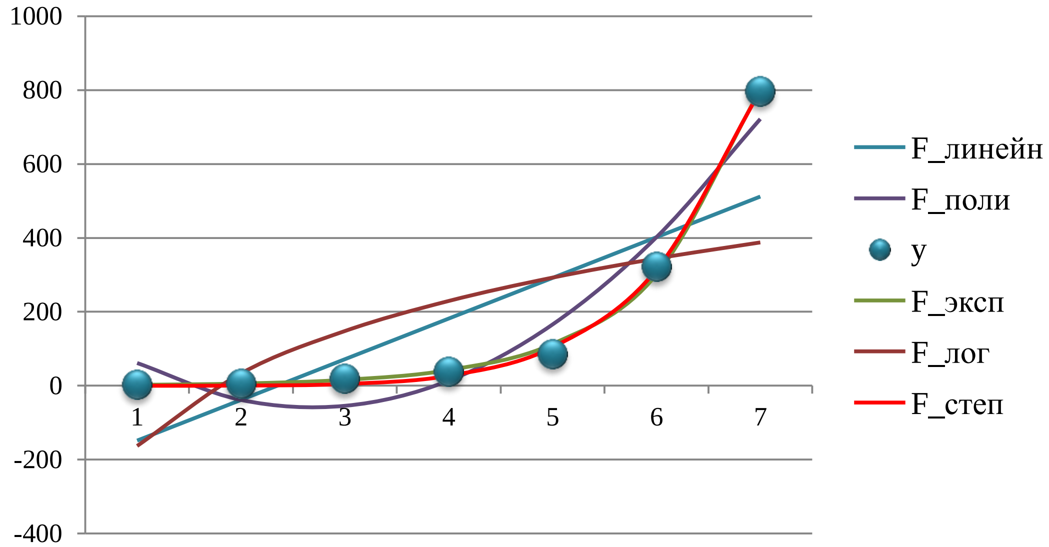
E10 =СУММКВРАЗН(B2:B8;E2:E8)

	A	B	C	D	E
1	x	y	F_линейн	F_поли	F_эксп
2	1	2,6	-148,4607	61,510749	2,255927672
3	2	6,4	-38,40718	-38,40672	6,00306201
4	3	19,0	71,64636	-54,33584	15,97425039
5	4	38,9	181,6999	13,723397	42,50775274
6	5	85,8	291,7535	165,77098	113,113855
7	6	322,3	401,807	401,80692	300,9978974
8	7	796,9	511,8606	721,83122	800,9605385
9	Сумма кв разностей		177976,2	29842,157	1238,761211
10	Коэффициенты функций	a	110,0535	41,994176	0,847768964
11		b	-258,5143	-225,9	0,978708401
12		c		245,41657	
13					
14	x	F			
15	8	1791,34515			
16					

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*x*	*y*	*F_линейн*	*F_поли*	*F_эксп*	*F_лог*	*F_степ*	
2	1	2,6	-148,4607	61,510749	2,255927672	-163,0318	0,006119	
3	2	6,4	-38,40718	-38,40672	6,00306201	33,169619	0,406289	
4	3	19,0	71,64636	-54,33584	15,97425039	147,94009	4,728656	
5	4	38,9	181,6999	13,723397	42,50775274	229,37103	26,97785	
6	5	85,8	291,7535	165,77098	113,113855	292,53378	104,1395	
7	6	322,3	401,807	401,80692	300,9978974	344,1415	313,9855	
8	7	796,9	511,8606	721,83122	800,9605385	387,77521	798,2645	***Min***
9	***Сумма кв разностей***		*177976,2*	*29842,157*	*1238,761211*	*291654,3*	*795,793*	**795,793**
10	**Коэффициенты функций**	***a***	**110,0535**	**41,99[illegible]176**	**0,8477[illegible]8964**	**2[illegible]3,0588**	**0,[illegible]06119**	
11		***b***	**-258,5143**	**-2[illegible]5,9**	**0,9787[illegible]8401**	**-163,0[illegible]18**	**6,053124**	
12		***c***		**245,41657**				
13								
14	*x*	*F*						
15	8	1791,34515						
16								
17	***Проверка коэффициентов линейного тренда***							
18	*a1*	*a0*						
19	110,054	-258,514286						

Целевые функции - разности сумм квадратов принимают значение минимум. Изменяемые ячейки жёлтого цвета

3. Построить графики полученных линейной и нелинейной эмпирических функций, накладывая их на диаграмму с экспериментальными данными.



4. **Из полученных минимальных значений сумм квадратов выбрать наименьшее значение! Соответствующую функцию** можно принимать за искомую эмпирическую зависимость, по которой вычисляется прогнозное значение в ячейке F15.

Задание 4

1. Разбив отрезок интегрирования на $n=10$ равных частей, вычислить приближённое значение интеграла $\int\limits_0^1 e^x dx$ всеми приближёнными методами:

   1) методом левых и правых прямоугольников (1 балл);
   2) методом трапеций (1 балл);
   3) методом Симпсона (1 балл).

2. Используя код VBA MS Excel вычислить интеграл одним из приближённых методов (5 баллов).
3. Вычислить погрешность при интегрировании одним из приближённых методов (1 балл).

Решение

1. Для вычисления интеграла $\int\limits_a^b f\left(x\right)dx$ приближёнными методами отрезок интегрирования $\left[a;b\right]$ разбивается на n равных частей, вычисляется значение $h=\dfrac{b-a}{n}$ и находятся координаты точек разбиения отрезка интегрирования: $x_0=a$, $x_{i+1}=x_i+h$, $x_n=b$. Далее вычисляются значения подынтегральной функции в полученных узлах: $f\left(x_i\right)$, $i=0,1,\ldots,n$ и используются известные формулы приближённого интегрирования: формулы левых и правых прямоугольников, формула трапеций, формула Симпсона.

Формулы левых и правых прямоугольников:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=h\cdot\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_{n-1}\right)\right)+R_n;\ \int\limits_a^b f\left(x\right)dx=h\cdot\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\ldots+f\left(x_n\right)\right)+R_n,$$

здесь R_n - погрешность интегрирования.

Погрешность интегрирования по формуле прямоугольников $\left|R_n\right|\le M_1\dfrac{(b-a)^2}{2n}$, где $M_1=\max\limits_{[a;b]}\left|f'(x)\right|$.

Формула трапеций:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=h\cdot\left(\frac{f\left(x_0\right)+f\left(x_n\right)}{2}+f\left(x_1\right)+\ldots+f\left(x_{n-1}\right)\right)+R_n.$$

Погрешность интегрирования по формуле трапеций $\left|R_n\right|\le M_2\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$, где $M_2=\max\limits_{[a;b]}\left|f''(x)\right|$.

Формула Симпсона:

$$\int\limits_a^b f\left(x\right)dx=\frac{h}{3}\cdot\left(f\left(x_0\right)+f\left(x_n\right)+4\cdot\left(f\left(x_1\right)+f\left(x_3\right)\cdots+f\left(x_{n-1}\right)\right)+2\cdot\left(f\left(x_2\right)+f\left(x_4\right)\cdots+f\left(x_{n-2}\right)\right)\right)+R_n,$$

$n=2k$.

Погрешность интегрирования по формуле Симпсона $\left|R_n\right|\le M_4\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}$, где $M_4=\max\limits_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Отрезок интегрирования в интеграле $\int_0^1 e^x dx$ - $[0;1]$, т.е. $a=0$, $b=1$, подынтегральная функция - $f(x)=e^x$.

Отрезок интегрирования разбиваем на $n=10$ равных частей, находим шаг и точки разбиения отрезка:

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{1-0}{10}=0{,}1.$$

$x_0=a=0$;
$x_1=x_0+h=0+0{,}1=0{,}1$;
$x_2=x_1+h=0{,}1+0{,}1=0{,}2$;
$x_3=x_2+h=0{,}2+0{,}1=0{,}3$;
$x_4=x_3+h=0{,}3+0{,}1=0{,}4$;
$x_5=x_4+h=0{,}4+0{,}1=0{,}5$;
$x_6=x_5+h=0{,}5+0{,}1=0{,}6$;
$x_7=x_6+h=0{,}6+0{,}1=0{,}7$;
$x_8=x_7+h=0{,}7+0{,}1=0{,}8$;
$x_9=x_8+h=0{,}8+0{,}1=0{,}9$;
$x_{10}=x_9+h=0{,}9+0{,}1=b=1{,}0$.

Далее вычисляются значения подынтегральной функции в полученных узлах x_i, $i=0,1,\ldots,10$:

$f(x_0)=f(0{,}0)=e^{0{,}0}=1{,}000000$;
$f(x_1)=f(0{,}1)=e^{0{,}1}=1{,}105171$;
$f(x_2)=f(0{,}2)=e^{0{,}2}=1{,}221403$;
$f(x_3)=f(0{,}3)=e^{0{,}3}=1{,}349859$;
$f(x_4)=f(0{,}4)=e^{0{,}4}=1{,}491825$;
$f(x_5)=f(0{,}5)=e^{0{,}5}=1{,}648721$;
$f(x_6)=f(0{,}6)=e^{0{,}6}=1{,}822119$;
$f(x_7)=f(0{,}7)=e^{0{,}7}=2{,}013753$;
$f(x_8)=f(0{,}8)=e^{0{,}8}=2{,}225541$;
$f(x_9)=f(0{,}9)=e^{0{,}9}=2{,}459603$;
$f(x_{10})=f(1{,}0)=e^{1{,}0}=2{,}718282$.

а) Вычисление интеграла $\int_0^1 e^x dx$ по формулам прямоугольников.

Для $n=10$ формулы выглядят так:

$$\int_a^b f(x)dx=h\cdot\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_9)\right)+R_{10};\ \int_a^b f(x)dx=h\cdot\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{10})\right)+R_{10}.$$

Оценка погрешности для $n=10$ при вычислении интеграла по формуле прямоугольников: $\left|R_{10}\right| \le M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2\cdot 10}$, где $M_1 = \max\limits_{[a;b]}\left|f'(x)\right|$.

Вычисления по формуле левых прямоугольников:

$$\int_0^1 e^x dx \approx 0,1\cdot\left(f(0,0)+f(0,1)+f(0,2)+f(0,3)+f(0,4)+f(0,5)+f(0,6)+f(0,7)+f(0,8)+f(0,9)\right)=$$
$$=0,1\cdot(1,000000+1,105171+1,221403+1,349859+1,491825+1,648721+1,822119+2,013753+2,225541+2,459603)=$$
$$=0,1\cdot 16,337994=1,6337994.$$

$$\int_0^1 e^x dx \approx 0,1\cdot\left(f(0,1)+f(0,2)+f(0,3)+f(0,4)+f(0,5)+f(0,6)+f(0,7)+f(0,8)+f(0,9)+f(1,0)\right)=$$
$$=0,1\cdot(1,105171+1,221403+1,349859+1,491825+1,648721+1,822119+2,013753+2,225541+2,459603+2,718282)=$$
$$=0,1\cdot 18,056276=1,805627583.$$

Оценка погрешности:

$$M_1=\max_{[0;1]}\left|\left(e^x\right)'\right|=\max_{[0;1]} e^x = e^1 = 2,718282,\ \left|R_{10}\right|\le 2,718282\cdot\frac{(1-0)^2}{2\cdot 10}=0,135914\approx 0,2.$$

Результат вычисления интеграла по формуле левых прямоугольников: $\int_0^1 e^x dx = 1,6\pm 0,2$.

Результат вычисления интеграла по формуле правых прямоугольников: $\int_0^1 e^x dx = 1,8\pm 0,2$.

b) Вычисление интеграла $\int_0^1 e^x dx$ по формуле трапеций.

Для $n=10$ формула выглядит так:

$$\int_a^b f(x)dx = h\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_{10})}{2}+f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)+f(x_7)+f(x_8)+f(x_9)\right)+R_{10}$$

Оценка погрешности для $n=10$ при вычислении интеграла по формуле трапеций: $\left|R_{10}\right|\le M_2\cdot\dfrac{(b-a)^3}{12\cdot 10^2}$, где $M_2=\max\limits_{[a;b]}\left|f''(x)\right|$.

Вычисления по формуле трапеций:

$$\int_0^1 e^x dx\approx 0,1\cdot\left(\frac{f(0,0)+f(1,0)}{2}+f(0,1)+f(0,2)+f(0,3)+f(0,4)+f(0,5)+f(0,6)+f(0,7)+f(0,8)+f(0,9)\right)=$$

$$=0,1\cdot\left(\frac{1,000000+2,718282}{2}+1,105171+1,221403+1,349859+1,491825+1,648721+1,822119+2,013753+2,225541+2,459603\right)=$$

$$=0,1\cdot\left(\frac{3,718282}{2}+15,337994\right)=0,1\cdot 17,197135=1,7197135.$$

Оценка погрешности:

$$M_2=\max_{[0;1]}\left|\left(e^x\right)''\right|=\max_{[0;1]}e^x=e^1=2,718282,\ \left|R_{10}\right|\le 2,718282\cdot\frac{(1-0)^3}{12\cdot 10^2}=0,002265=0,003.$$

Результат вычисления интеграла по формуле трапеций: $\int\limits_0^1 e^x dx=1,719\pm 0,003$.

c) Вычисление интеграла $\int\limits_0^1 e^x dx$ по формуле Симпсона.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\frac{h}{3}\cdot\left(f(x_0)+f(x_n)+4\cdot\left(f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+f(x_7)+f(x_9)\right)+2\cdot\left(f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+f(x_8)\right)\right)+R_{10}.$$

Оценка погрешности для $n=10$ при вычислении интеграла по формуле Симпсона: $\left|R_{10}\right|\le M_4\frac{(b-a)^5}{180\cdot 10^4}$, где $M_4=\max\limits_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|$.

Вычисления по формуле Симпсона:

$$\int\limits_0^1 e^x dx\approx\frac{0,1}{3}\cdot\left(f(0,0)+f(1,0)+4\cdot\left(f(0,1)+f(0,3)+f(0,5)+f(0,7)+f(0,9)\right)+2\cdot\left(f(0,2)+f(0,4)+f(0,6)+f(0,8)\right)\right)=$$

$$=\frac{0,1}{3}\cdot\left(1,000000+2,718282+4\cdot(1,105171+1,349859+1,648721+2,013753+2,459603)+2\cdot(1,221403+1,491825+1,822119+2,225541)\right)=$$

$$=\frac{0,1}{3}\cdot\left(3,718282+4\cdot 8,577107+2\cdot 6,760887\right)=1,718283\cdot$$

Оценка погрешности:

$$M_4=\max_{[0;1]}\left|\left(e^x\right)^{(4)}\right|=\max_{[0;1]}e^x=e^1=2,718282,\ \left|R_{10}\right|\le 2,718282\cdot\frac{(1-0)^5}{180\cdot 10^4}=0,000001510157\approx 0,000002.$$

Результат вычисления интеграла по формуле Симпсона: $\int\limits_0^1 e^x dx=1,718283\pm 0,000002$.

2. Код VBA MS Excel

```
Private Sub Integral()
Dim a, b, h, x, S As Double
Dim f(11) As Double
Dim i, n As Integer
a = 0
b = 1
n = 10
h = (b - a) / n

'Формирование массива значений подынтегральной функции'
For i = 0 To n
x = a + i * h
f(i) = Exp(x)
Next

'Формула левых прямоугольников'
S = 0
For i = 0 To n - 1
S = S + f(i)
Next
S = h * S
MsgBox "Iлп=" & S

'Формула правых прямоугольников'
S = 0
For i = 1 To n
S = S + f(i)
Next
S = h * S
MsgBox "Iпп=" & S

'Формула трапеций'
S = (f(0) + f(10)) / 2
For i = 1 To n - 1
S = S + f(i)
Next
S = h * S
MsgBox "Iтр=" & S

'Формула Симпсона'
S = f(0) + f(10)
For i = 1 To n - 1 Step 2
S = S + 4 * f(i)
Next
For i = 2 To n - 2 Step 2
S = S + 2 * f(i)
Next
S = h / 3 * S
MsgBox "Ic=" & S

End Sub
```

3. Оценка погрешностей с помощью неравенств и правильно выписанные ответы смотреть в п.1 данной задачи. Если считать производные затруднительно, то можно воспользоваться умением вычислять интеграл по формуле Ньютона-Лейбница (в вашем случае все интегралы табличные, должны уметь!). Тогда абсолютная погрешность интегрирования равна $\Delta = \left| I - I^* \right|$, где I - значение интеграла, вычисленное по формуле Ньютона-Лейбница, I^* - приближённое значение интеграла.

По формуле Ньютон-Лейбница $\int\limits_0^1 e^x dx = e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = 2,718282 - 1 = 1,718282$.

Тогда, например, абсолютные погрешности интегрирования по формулам прямоугольников равны: $\Delta = |1,6337994 - 1,718282| = 0,08$ - для левых прямоугольников и $\Delta = |1,805627583 - 1,718282| = 0,09$ - для правых прямоугольников.

Полученные значения погрешностей отличаются от вычисленных ранее, т.к. и в том, и в другом случае погрешность вычисления самой подынтегральной функции тоже имеет место.

Использование электронных таблиц MS Excel для вычисления приближённых значений интегралов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	10		В этих столбцах - коэффициенты при $f(x)$							
2	a	0									
3	b	1									
4	h	0,1									
5	i	x	$f(x)$	$k_{лп}$	$k_{пп}$	$k_{тр}$	k_C	$k_{лп}$*$f(x)$	$k_{пп}$*$f(x)$	$k_{тр}$*$f(x)$	k_C*$f(x)$
6	0	0	1,000000	1	0	0,5	1	1,000000	0,000000	0,500000	1,000000
7	1	0,1	1,105171	1	1	1	4	1,105171	1,105171	1,105171	4,420684
8	2	0,2	1,221403	1	1	1	2	1,221403	1,221403	1,221403	2,442806
9	3	0,3	1,349859	1	1	1	4	1,349859	1,349859	1,349859	5,399435
10	4	0,4	1,491825	1	1	1	2	1,491825	1,491825	1,491825	2,983649
11	5	0,5	1,648721	1	1	1	4	1,648721	1,648721	1,648721	6,594885
12	6	0,6	1,822119	1	1	1	2	1,822119	1,822119	1,822119	3,644238
13	7	0,7	2,013753	1	1	1	4	2,013753	2,013753	2,013753	8,055011
14	8	0,8	2,225541	1	1	1	2	2,225541	2,225541	2,225541	4,451082
15	9	0,9	2,459603	1	1	1	4	2,459603	2,459603	2,459603	9,838412
16	10	1	2,718282	0	1	0,5	1	0,000000	2,718282	1,359141	2,718282
17								16,337994	18,056276	17,197135	51,548483
18											
19								$I_{Ньютон-Лейбниц}$		1,7182818	
20								Приближённое значение интеграла		Δ	δ
21								$I_{лп}$	1,63	0,08	5,2%
22								$I_{пп}$	1,81	0,09	4,8%
23								$I_{тр}$	1,720	0,001	0,1%
24								I_C	1,718283	0,000001	0,0%

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	10									
2	a	0		В этих столбцах - коэффициенты при $f(x)$							
3	b	1									
4	h	=(B3-B2)/B1									
5	i	x	$f(x)$	$k_{лп}$	$k_{пп}$	$k_{тр}$	k_C	$k_{лп}$*$f(x)$	$k_{пп}$*$f(x)$	$k_{тр}$*$f(x)$	k_C*$f(x)$
6	0	0	=EXP($B6)	1	0	0,5	1	=$C6*D6			
7	1	=B6+$B$4		1	1	1	4				
8	2			1	1	1	2				
9	3			1	1	1	4				
10	4			1	1	1	2				
11	5			1	1	1	4				
12	6			1	1	1	2				
13	7			1	1	1	4				
14	8			1	1	1	2				
15	9			1	1	1	4				
16	10			0	1	0,5	1				
17								=СУММ(H6:H16)			
18											
19								$I_{Ньютон-Лейбниц}$		=EXP(B3)-EXP(B2)	
20								Приближённое значение интеграла		Δ	δ
21								$I_{лп}$	=H17*B4	=ABS(I21-$J$19)	=ABS(J21/I21)
22								$I_{пп}$	=I17*B4		
23								$I_{тр}$	=J17*B4		
24								I_C	=K17*B4/3		

Задание 5

1. Методом Эйлера решить задачу Коши для уравнения первого порядка $y' = x + \cos y$, $y(1{,}8) = 2$ на отрезке $[1{,}8; 2{,}8]$ с шагом h = 0,1 (1 балл).
2. Найти $y(2{,}1)$ (0,5 балла).
3. Используя код VBA MS Excel вычислить координаты точек интегральной кривой методом Эйлера (5 баллов).
4. Построить ломаную Эйлера по полученным данным (0,5 балла).

Решение

1. Решение задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ методом Эйлера состоит в нахождении координат точек интегральной кривой $x_{i+1} = x_i + h$, $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$. Здесь $f(x, y) = x + \cos y$ - правая часть дифференциального уравнения, $f(x_i, y_i) = x_i + \cos y_i$.

	A	B	C	D	E
1	***x*** **0**	1,8			
2	***b***	2,8			
3	***h***	0,1			
4	***i***	***x***	***y***	***f(x,y)***	***hf(x,y)***
5	0	1,8	2	1,38385	0,13839
6	1	1,9	2,13839	1,3624	0,13624
7	2	2	2,27463	1,35286	0,13529
8	3	2,1	2,40991	1,35595	0,13559
9	4	2,2	2,54551	1,37246	0,13725
10	5	2,3	2,68275	1,40343	0,14034
11	6	2,4	2,8231	1,45029	0,14503
12	7	2,5	2,96812	1,51501	0,1515
13	8	2,6	3,11963	1,60024	0,16002
14	9	2,7	3,27965	1,70951	0,17095
15	10	2,8	3,4506	1,84736	0,18474

	A	B	C	D	E
1	***x*** **0**	1,8			
2	***b***	2,8			
3	***h***	0,1			
4	***i***	***x***	***y***	***f(x,y)***	***hf(x,y)***
5	0	1,8	2	=B5+COS(C5)	=$B$3*D5
6	=A5+1	=B5+$B$3	=C5+E5		
7					
8					
9					
10					
11					
12					
13					
14					
15					

2. $y(2{,}1) = 2{,}40991$ - определяется по полученному массиву (*x*,*y*), (B2:C13).
3. Отдельно вычисляются значения правой части ДУ функцией fun_eu. Заполнение массива на листе происходит с помощью процедуры euler().

```
Function fun_eu(x, y As Double) As Double 'Правая часть ДУ'
fun_eu = x + Cos(y)
End Function
```

```
Private Sub euler()
Dim i As Integer
Dim h, x, y As Double

h = Cells(3, 2) 'Шаг'
b = Cells(2, 2) 'b'
'Начальные условия'
x = Cells(5, 2)
y = Cells(5, 3)
i = 6
While x <= b
y = y + h * fun_eu(x, y)
x = x + h
Cells(i, 2) = x
Cells(i, 3) = y
i = i + 1
Wend
End Sub
```

4. Ломаная Эйлера строится по найденному массиву (*x*,*y*), (B2:C13).