Задача Коши для уравнения теплопроводности.
Задача о теплопроводности бесконечного стержня с изолированной боковой поверхностью.

1. Случай неограниченного стержня. Ставится задача о нахождении решения $u(x, t)$ уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ t>0,\ -\infty<x<+\infty,$$

удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0)=f(x)$, $-\infty<x<+\infty$. Применив метод Фурье, получаем решение уравнения в виде

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi$$

— интеграл Пуассона.

Задача **Решить уравнение $\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ для следующего начального распределения температуры стержня:**

$$u(x, t)\big|_{t=0}=f(x)=\begin{cases} u_0 & \text{при } x_1<x<x_2,\\ 0 & \text{при } x<x_1 \text{ или } x>x_2.\end{cases}$$

△ Стержень является бесконечным, поэтому решение запишется в виде интеграла Пуассона:

$$u(x, t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\cdot e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Так как $f(x)$ в интервале (x_1, x_2) равна постоянной температуре u_0, а вне интервала температура равна нулю, то решение примет вид

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot\int_{x_1}^{x_2} e^{-(\xi-x)^2/(4a^2t)}\,d\xi.$$

Полученный результат можно преобразовать к интегралу вероятностей (см. с. 203):

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Действительно, полагая $x-\xi/(2a\sqrt{t})=\mu$, $d\xi=-2a\sqrt{t}\cdot d\mu$, получим

$$u(x, t)=-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})}^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu=$$

$$=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(x-x_1)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu-\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int_0^{(x-x_2)/(2a\sqrt{t})} e^{-\mu^2}\,d\mu.$$

Таким образом, решение выразится формулой

$$u(x, t)=\frac{u_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$