Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье.
Задача о распространении тепла в стержне,
на концах которого поддерживается нулевая температура

Задача состоит в отыскании решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}; \; x \in (0, l), \; t \in (0, +\infty) \tag{1}$$

при граничных условиях

$$U(0,t) = 0, \; t \in (0, +\infty), \tag{2}$$

$$U(l,t) = 0, \; t = (0, +\infty) \tag{3}$$

и начальном условии

$$U(x,0) = \varphi(x), \; x \in (0, l). \tag{4}$$

Решение задачи (1) – (4) находится по формуле

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 t} \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{6}$$

где коэффициенты a_n определяются по формуле

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l} dx \tag{7}$$

Задача

Решить уравнение $\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial U}{\partial x^2}$

при заданных условиях $U(0,t) = 0; U(l,t) = 0$; $U(x,0) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le l/2 \\ l - x, & l/2 \, \pi \, x \le l. \end{cases}$

Решение

Будем искать решение задачи по формуле (6).

Найдем коэффициенты a_n по формуле (7).

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^{l/2} x\sin\frac{n\pi x}{l}dx + \frac{2}{l}\int_{l/2}^{l}(l-x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \begin{bmatrix} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin\dfrac{n\pi x}{l}dx, \; v = -\dfrac{l}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{l} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{2}{l}\left(-x\cdot\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_0^{l/2} + \int_0^{l/2}\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right) + 2\left(-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{l/2}^{l}\right) - \frac{2}{l}\left(-x\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Bigg|_{l/2}^{l} + \int_{l/2}^{l}\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{l}\left(-\frac{l^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2}{l}\left(\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{2l}{n\pi}\cdot(-1)^n + \frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2l}{n\pi}(-1)^n - \frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2}{l}\cdot\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} =$$

$$= -\frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{4l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, решение задачи имеет вид

$$U(x,t) = \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot e^{-\frac{n^2\pi^2 a^2}{l^2}t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$