

**Решение смешанной задачи для уравнения колебания струны методом Фурье.
Решение задачи колебаний струны, закреплённой на концах**

Задача о колебании такой струны сводится к нахождению решения уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$U(x,t)|_{t=0} = \varphi(x), \quad U_t(x,t)|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in (0,l), \quad (2)$$

и граничным условиям

$$U(x,t)|_{x=0} = 0, \quad U(x,t)|_{x=l} = 0, \quad t \in (0,+\infty). \quad (3)$$

Решение задачи (1) – (3) даёт формула

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin \frac{k\pi a}{l} t \right) \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (4)$$

где коэффициенты a_k, b_k находятся по формулам

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{2}{k\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \quad (5)$$

Задача

Найти решение уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, удовлетворяющее начальным и граничным

условиям $U(x,0) = \frac{1}{8} \sin \frac{3\pi x}{l}, U'_t(x,0) = 0, U(0,t) = U(l,t) = 0$.

Решение

Решение задачи даёт формула (4). Найдём a_k и b_k по формулам (5)

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{4l} \int_0^l \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = [\text{при } k \neq 3] = \\ &= \frac{1}{8l} \int_0^l \left(\cos(3-k) \frac{\pi}{l} x - \cos(3+k) \frac{\pi}{l} x \right) dx = \\ &= \frac{1}{8l} \left(\frac{l}{(3-k)\pi} \sin(3-k) \frac{\pi}{l} x \Big|_0^l - \frac{l}{(3+k)\pi} \sin(3+k) \frac{\pi}{l} x \Big|_0^l \right) = \\ &= \frac{1}{8l} \left(\frac{l}{(3-k)\pi} \sin(3-k)\pi - \frac{l}{(3+k)\pi} \sin(3+k)\pi \right) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $k = 3$;

$$\begin{aligned} a_3 &= \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{8} \int_0^l \sin \frac{3\pi x}{l} \sin \frac{3\pi x}{l} dx = \frac{1}{8l} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{6\pi x}{l} \right) dx = \frac{1}{8l} \left(x \Big|_0^l - \frac{l}{6\pi} \sin \frac{6\pi x}{l} \Big|_0^l \right) = \frac{1}{8}, \\ b_k &= 0. \end{aligned}$$

Тогда, подставляя значение a_k и b_k в (4), получаем решение задачи:

$$U(x,t) = \frac{1}{8} \cos \frac{3\pi a}{l} t \sin \frac{3\pi}{l} x.$$