

**Решение задачи Коши для волнового уравнения.
 Формула Даламбера для решения задачи Коши
 о свободных колебаниях бесконечной струны**

Решение задачи Коши о свободных колебаниях бесконечной струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \psi(x).$$

Находится по формуле Даламбера

$$u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(z) dz.$$

Задачи

990. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если } u|_{t=0} = x^2, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

△ Так как $a=1$, а $\psi(x)=0$, то $u = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2}$, где $\varphi(x) = x^2$.

Таким образом,

$$u = \frac{(x-t)^2 + (x+t)^2}{2}, \quad \text{или } u = x^2 + t^2. \quad \blacktriangle$$

991. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{если } u|_{t=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x.$$

△ Здесь $a=2$, $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=x$. Отсюда

$$u = \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} z dz = \frac{1}{8} z^2 \Big|_{x-2t}^{x+2t} = \frac{1}{8} [(x+2t)^2 - (x-2t)^2], \quad \text{т. е. } u = xt. \quad \blacktriangle$$