ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ (СЛУ)

Рассмотрим СЛУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

В матричном виде она имеет вид

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (2)$$

где $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ – вектор с неизвестными компонентами,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица с коэффициентами при неизвестных,

$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – вектор правой части.

Пусть $\det A \neq 0$. Из курса алгебры известно, что в этом случае решение системы будет единственным.

Методы решения СЛУ можно разделить на 2 группы:

- точные (метод Гаусса, формулы Крамера, с помощью обратной матрицы)
- приближенные (итераций, Зейделя)

Метод итераций (Якоби)

Теорема. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда при выполнении достаточных условий сходимости (ДУС)

$$\begin{cases} |a_{11}| > |a_{12}| + |a_{13}|, \\ |a_{22}| > |a_{21}| + |a_{23}|, \\ |a_{33}| > |a_{31}| + |a_{32}| \end{cases} \qquad \text{(ДУС)}$$

приведя систему $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ к виду $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}$ с помощью итерационных формул

$$\mathbf{x}^{k+1} = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}^{k}, \; k = 0,1,2,... \qquad \text{(И)}$$

приняв за начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно найти единственно решение $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{pmatrix}$ системы (1) с заданной точностью ε.

Процесс останавливается, когда $\Delta^{(k+1)} = \max\limits_{i=1,2,3} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$ Решение записывается в виде: $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^{k+1} \pm \varepsilon \cdot E$.

<u>Схема приведения СЛУ к виду, пригодному для итераций</u>

1. С помощью линейных преобразований (умножением уравнений системы на число, их сложением, перестановкой строк), добиться выполнения ДУС.
2. Поделим первое уравнение на a_{11}, второе на a_{22}, третье на a_{33}:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \; : a_{11} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, : a_{22} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \; : a_{33} \end{cases}$$

Система примет вид:

$$\begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \tilde{a}_{13}x_3 = \tilde{b}_1, \\ \tilde{a}_{21}x_1 + x_2 + \tilde{a}_{23}x_3 = \tilde{b}_2, \\ \tilde{a}_{31}x_1 + \tilde{a}_{32}x_2 + x_3 = \tilde{b}_3 \end{cases}$$

где $\tilde{a}_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, \quad \tilde{b}_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$.

Выпишем матрицу с коэффициентами при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & 1 & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

3. В первом уравнении системы справа оставим x_1, во втором x_2, в третьем x_3, все остальное перенесем вправо:

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - (0 \cdot x_1 + \tilde{a}_{12} \cdot x_2 + \tilde{a}_{13} \cdot x_3), \\ x_2 = \tilde{b}_2 - (\tilde{a}_{21} \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \tilde{a}_{23} \cdot x_3), \\ x_3 = \tilde{b}_3 - (\tilde{a}_{31} \cdot x_1 + \tilde{a}_{32} \cdot x_2 + 0 \cdot x_3) \end{cases}$$

В матричном виде $\mathbf{x}^{k+1} = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}^k$, где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & 0 & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{pmatrix}$.

Нетрудно заметить, что матрицу $\tilde{A}$, как и вектор-столбец $\tilde{\mathbf{b}}$, можно получить уже на этапе 2 из матрицы (3), заменив в ней единицы на диагонали нулями.

Пример

Методом итераций найти четыре первых приближенных решения системы

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение

Найдем определитель из коэффициентов при неизвестных системы: $\begin{vmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 2 & 10 & 4 \\ 7 & 1 & -10 \end{vmatrix} = \text{-}1196 \neq 0$.

Проверим выполнение ДУС:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, & |10| > |1| + |3|, \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 1, & |10| > |2| + |4|, \\ 7x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 & |-10| > |7| + |1|, \end{cases}$$

Делим первое уравнение на коэффициент при x_1 (на 10), второе на коэффициент при x_2 (на 10), третье на коэффициент при x_3 (на (-10)):

$$\begin{cases} x_1 + 0,1x_2 + 0,3x_3 = 0, \\ 0,2x_1 + x_2 + 0,4x_3 = 0,1, \\ -0,7x_1 - 0,1x_2 + x_3 = -0,2 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0 & 0,4 \\ -0,7 & -0,1 & 0 \end{pmatrix} = 0,1\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ -0,2 \end{pmatrix} = 0,1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^1 = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}^0 = \tilde{\mathbf{b}} = 0,1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{x}^2 = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}^1 = 0,1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0,1^2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0,1\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,8 \\ -1,9 \end{pmatrix} = 0,1^2\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -19 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^3 = \tilde{\mathbf{b}} - \tilde{A}\mathbf{x}^2 = 0,1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 0,1^3\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 18 \\ -19 \end{pmatrix} = 0,1\begin{pmatrix} 0,39 \\ 1,66 \\ -1,47 \end{pmatrix},$$

Метод Зейделя

Это модифицированный метод итераций. При вычислении приближений x_i используются только «свежие» просчитанные приближенные значения x_j, $i \neq j$, $i, j = 1,2,3$.
Достаточные условия сходимости и подготовка к процессу итераций те же, что и в предыдущем методе. Система приводится к виду:

$$\begin{cases} x_1 = \tilde{b}_1 - (\tilde{a}_{12} \cdot x_2 + \tilde{a}_{13} \cdot x_3), \\ x_2 = \tilde{b}_2 - (\tilde{a}_{21} \cdot x_1 + \tilde{a}_{23} \cdot x_3), \\ x_3 = \tilde{b}_3 - (\tilde{a}_{31} \cdot x_1 + \tilde{a}_{32} \cdot x_2) \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \tilde{b}_1 - (\tilde{a}_{12} x_2^{(k)} + \tilde{a}_{13} x_3^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \tilde{b}_2 - (\tilde{a}_{21} x_1^{(k+1)} + \tilde{a}_{23} x_3^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = \tilde{b}_3 - (\tilde{a}_{31} x_1^{(k+1)} + \tilde{a}_{32} x_2^{(k+1)}) \end{cases}$$

$$k = 0, 1, 2, \qquad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Пример

Методом Зейделя найти четыре первых приближенных решения системы

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 - 10x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}1x_2 + 0{,}3x_3 = 0, \\ 0{,}2x_1 + x_2 + 0{,}4x_3 = 0{,}1, \\ -0{,}7x_1 - 0{,}1x_2 + x_3 = -0{,}2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -(0{,}1x_2 + 0{,}3x_3), \\ x_2 = 0{,}1 - (0{,}2x_1 + 0{,}4x_3), \\ x_3 = -0{,}2 + 0{,}7x_1 + 0{,}1x_2 \end{cases}$$

$k = 0$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$

$k = 1$

$$\begin{cases} x_1 = -(0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0) = 0, \\ x_2 = 0,1 - (0,2 \cdot 0 + 0,4 \cdot 0) = 0,1, \\ x_3 = -0,2 + 0,7 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,1 = -0,19 \end{cases}$$

$k = 2$

$$\begin{cases} x_1 = -(0,1 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot (-0,19)) = 0,047, \\ x_2 = 0,1 - (0,2 \cdot 0,047 + 0,4 \cdot (-0,19)) = 0,1666, \\ x_3 = -0,2 + 0,7 \cdot 0,047 + 0,1 \cdot 0,1666 = \text{-}0,15044 \end{cases}$$