МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЁННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Формула Ньютона - Лейбница

$$f(x) \in C[a;b]$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

- Точные методы
  - Первообразная известна, формула Ньютона-Лейбница
- Приближённые методы
  - Первообразная неизвестна
  - Функция задана таблично

Задача численного интегрирования - вычисление значения определённого интеграла на основании ряда значений подынтегральной функции

Определение

Численное вычисление однократного определённого интеграла - **механическая квадратура**

Численное вычисление двойного определённого интеграла - **механическая кубатура**

ФОРМУЛА МЕХАНИЧЕСКОЙ КВАДРАТУРЫ

Пусть известны значения ***f*(*x*)** в узлах

$\boldsymbol{x}$	x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$\boldsymbol{f(x)}$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\ldots$	$f(x_n)$

Интерполяция ***f*(*x*)** многочленом Лагранжа на [a;b]

$$f\left(x_i\right) \equiv L_n\left(x_i\right),\ i = \overline{0,n}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b L_n(x)\,dx + R_n = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} L_n^{(i)}(x)\cdot f(x_i)\,dx + R_n =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b L_n^{(i)}(x)\,dx\right)\cdot f(x_i) + R_n = \sum_{i=0}^{n} A_i\cdot f(x_i) + R_n$$

Приближённая формула механической квадратуры

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i\cdot f(x_i)$$

Замечания

- A_i не зависит от $f(x)$
- для $f(x)=x^k$ квадратурная формула - точная

$$] \, f\left(x\right) \equiv x^k, \; k = \overline{0,n}$$

$$\int\limits_a^b f\left(x\right) dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot f\left(x_i\right)$$

$$\int\limits_a^b x^k \, dx = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^k$$

$$\left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_a^b = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^k$$

$$\boxed{\frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^k}, \; k = \overline{0,n}$$

$$
\left.
\begin{array}{ll}
k=0 & b-a=\sum_{i=0}^{n} A_i \\[2ex]
k=1 & \dfrac{b^2-a^2}{2}=\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot x_i \\[2ex]
k=2 & \dfrac{b^3-a^3}{3}=\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot x_i^2 \\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots & \\[2ex]
k=n & \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}=\sum_{i=0}^{n} A_i\cdot x_i^n
\end{array}
\right\}
$$

$$X \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} b-a \\ \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ \dfrac{b^3-a^3}{3} \\ \ldots \\ \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_n \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = X^{-1} \cdot \mathbf{c}$$

$$\det X \neq 0 \left(\text{определитель Вандермонда}\right)$$

Задача

Вывести квадратурную формулу

$$\int_0^1 f(x)\,dx = A_0 \cdot f\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 \cdot f\left(\frac{3}{4}\right)$$

Решение

$a = 0 \qquad b = 1$

$x_0 = \frac{1}{4} \qquad x_1 = \frac{1}{2} \qquad x_2 = \frac{3}{4}$

$$\left.\begin{aligned} &k = 0, \quad b - a = \sum_{i=0}^{n} A_i \\ &k = 1, \quad \frac{b^2 - a^2}{2} = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i \\ &k = 2, \quad \frac{b^3 - a^3}{3} = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &k = 0, \quad 1 = \sum_{i=0}^{n} A_i \\ &k = 1, \quad \frac{1}{2} = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i \\ &k = 2, \quad \frac{1}{3} = \sum_{i=0}^{n} A_i \cdot x_i^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} &1 = A_0 + A_1 + A_2 \\ &\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot A_0 + \frac{1}{2} \cdot A_1 + \frac{3}{4} \cdot A_2 \\ &\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot A_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot A_1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot A_2 \end{aligned}\right\}$$

$$A_0 = \frac{2}{3} \qquad A_1 = -\frac{1}{3} \qquad A_2 = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot f\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\cdot f\left(\frac{3}{4}\right)}$$

Пример

$$\int_0^1 \exp(x)\,dx = \exp(1) - \exp(0) = 1{,}718281828$$

$$\int_0^1 \exp(x)\,dx = \frac{2}{3}\cdot\exp\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\cdot\exp\left(\frac{3}{4}\right) = 1{,}717776533$$

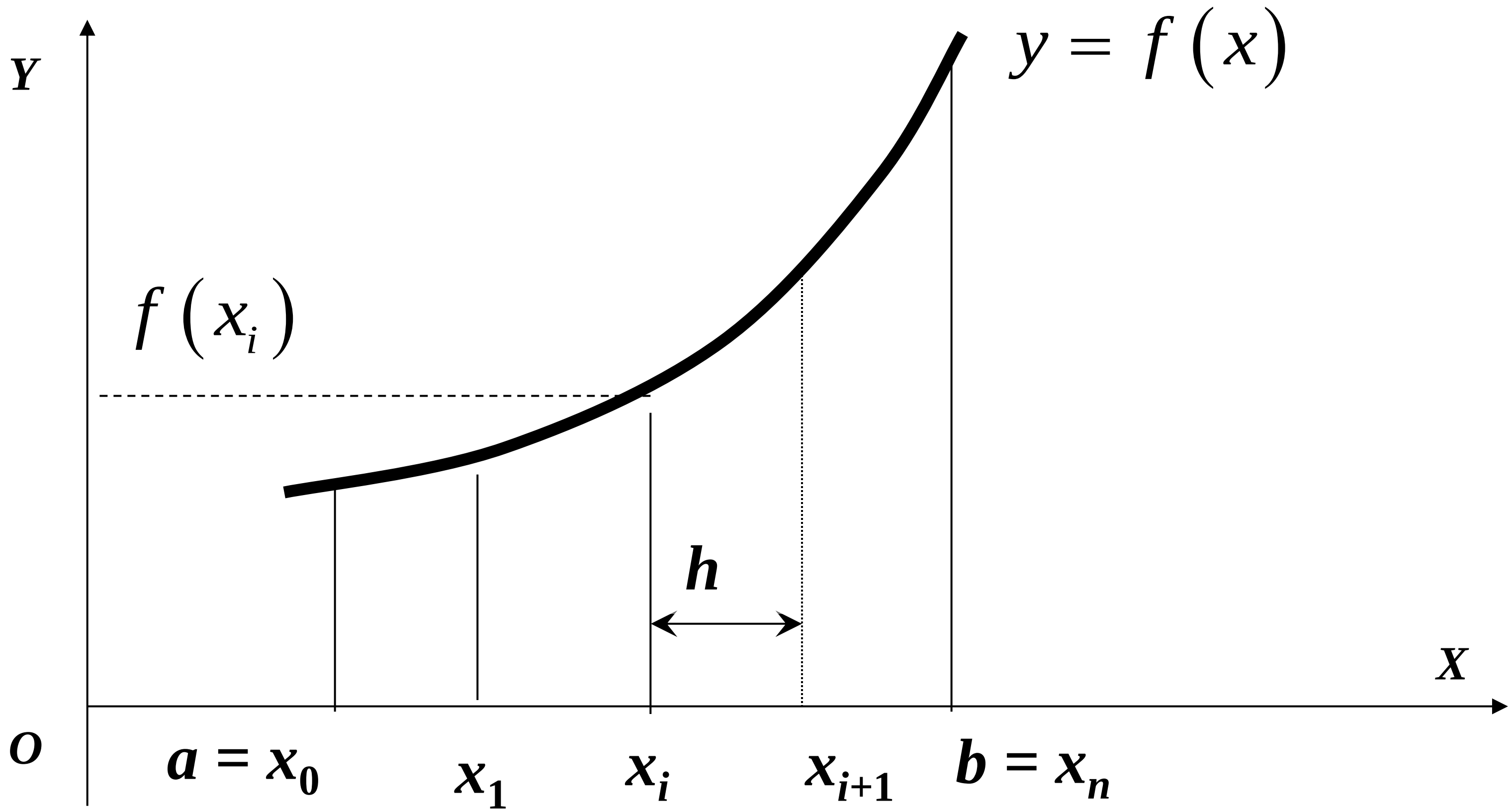
ФОРМУЛЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$[a;b]$ делится на n частей

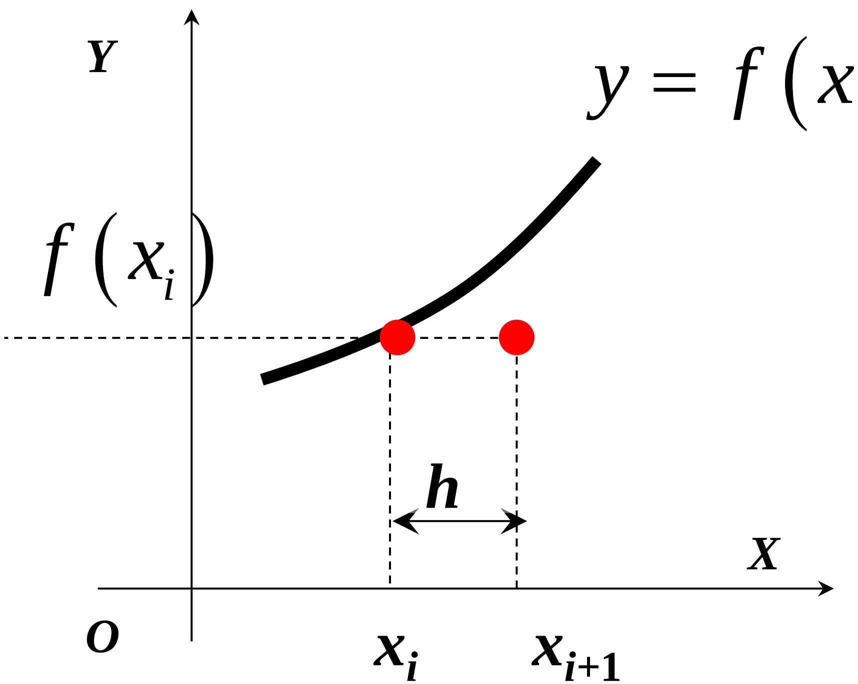
$$h = \frac{b-a}{n}$$

$$x_0 = a,\ \ x_{i+1} = x_i + h, \qquad x_n = b$$



Y
$y = f(x)$
$f(x_i)$
h
X
O
$a = x_0$
x_1
x_i
x_{i+1}
$b = x_n$

Интерполяция на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$



Многочлен Ньютона для 2-х узлов (левая сторона)

x_i	x_i+h
$f(x_i)$	$f(x_i)$

$$N_1(x) = f(x_i) + \left(f(x_i) - f(x_i) \right) \cdot \frac{x - x_i}{h} = f(x_i)$$

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx \approx \int_{x_i}^{x_i+h} N_1(x)\,dx = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x_i)\,dx =$$

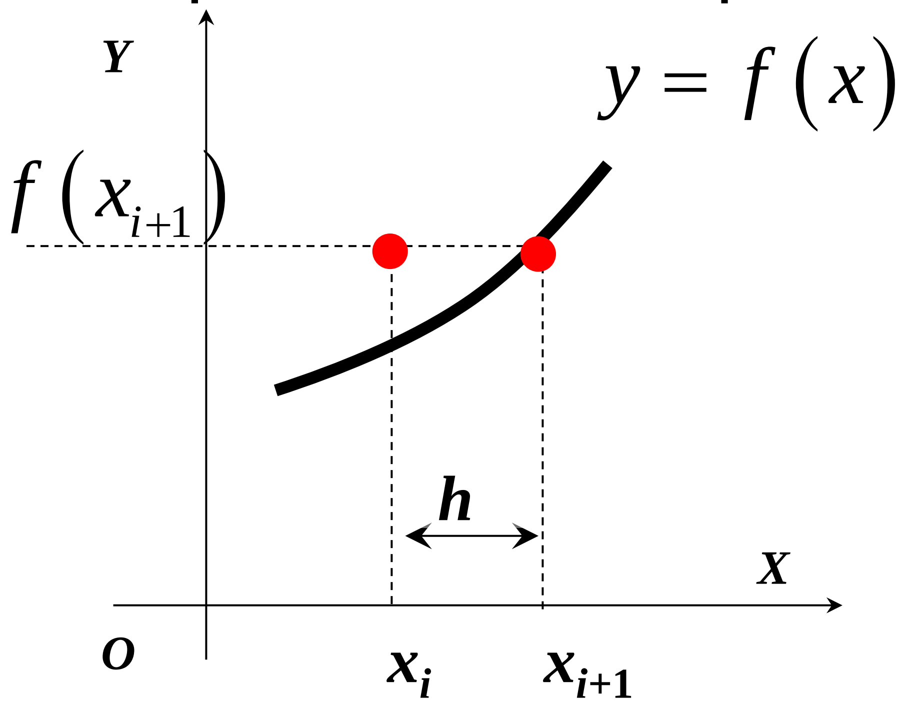
$$= f(x_i)\int_{x_i}^{x_i+h} dx = f(x_i)\cdot h$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f(x_i)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cdot h = h\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$

Формула левых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\big(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\big)+R_n$$

Интерполяция на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$



Многочлен Ньютона для 2-х узлов (правая сторона)

x_i	$x_i + h$
$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+1})$

$$N_1(x) = f(x_{i+1}) + \left(f(x_{i+1}) - f(x_{i+1}) \right) \cdot \frac{x - x_i}{h} = f(x_{i+1})$$

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)dx \approx \int_{x_i}^{x_i+h} N_1(x)dx = \int_{x_i}^{x_i+h} f(x_{i+1})dx =$$

$$= f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_i+h} dx = f(x_{i+1}) \cdot h$$

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x_{i+1})dx = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot h = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_{i+1})$$

Формула правых прямоугольников

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)+R_n$$

Оценка погрешности формулы

$$\left|R_n\right| \le M_1 \frac{(b-a)^2}{2n}, \qquad M_1 = \max_{[a;b]} \left| f'(x) \right|$$

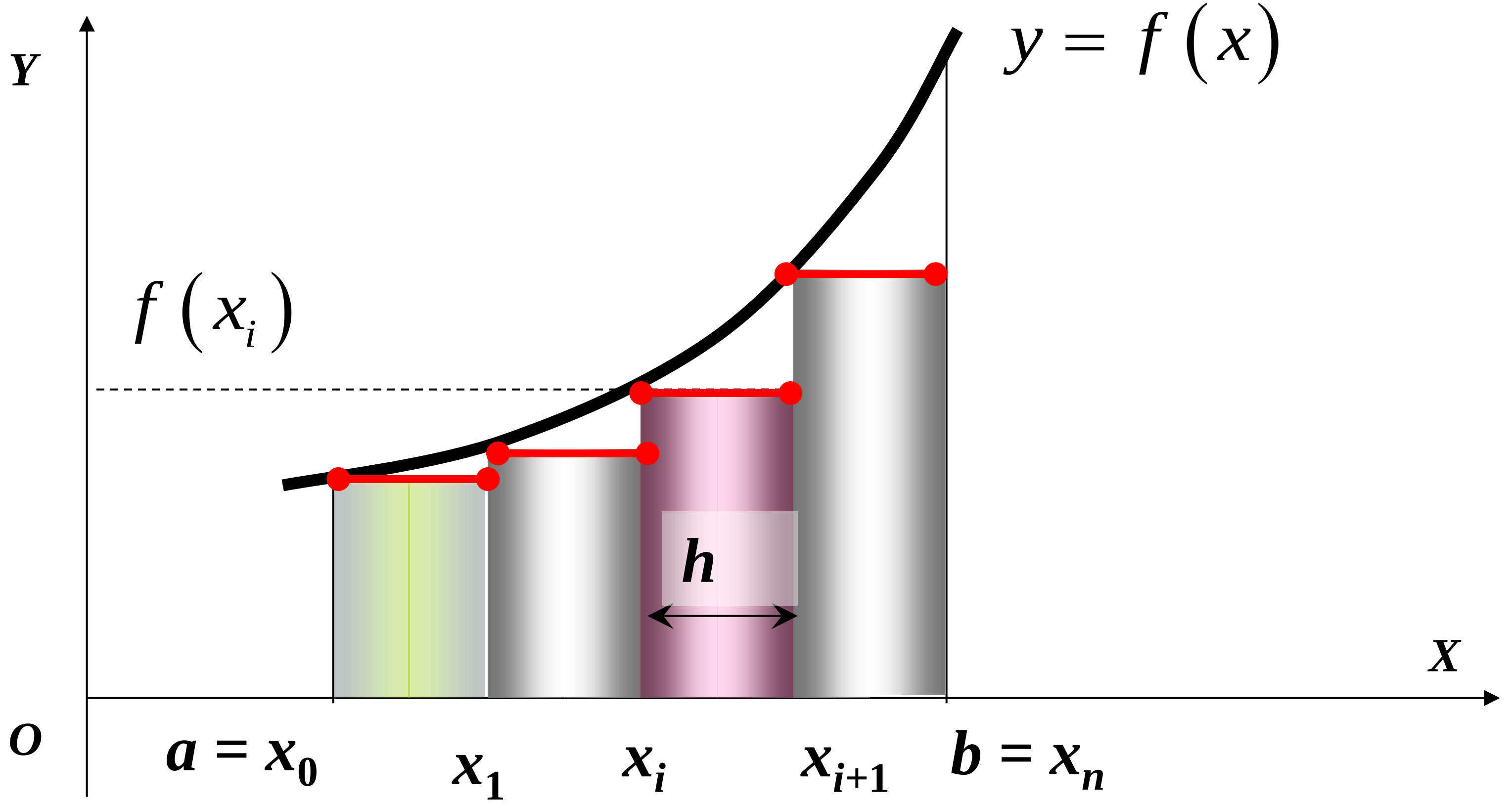
Оценка погрешности формулы

Если задана точность вычисления ε,

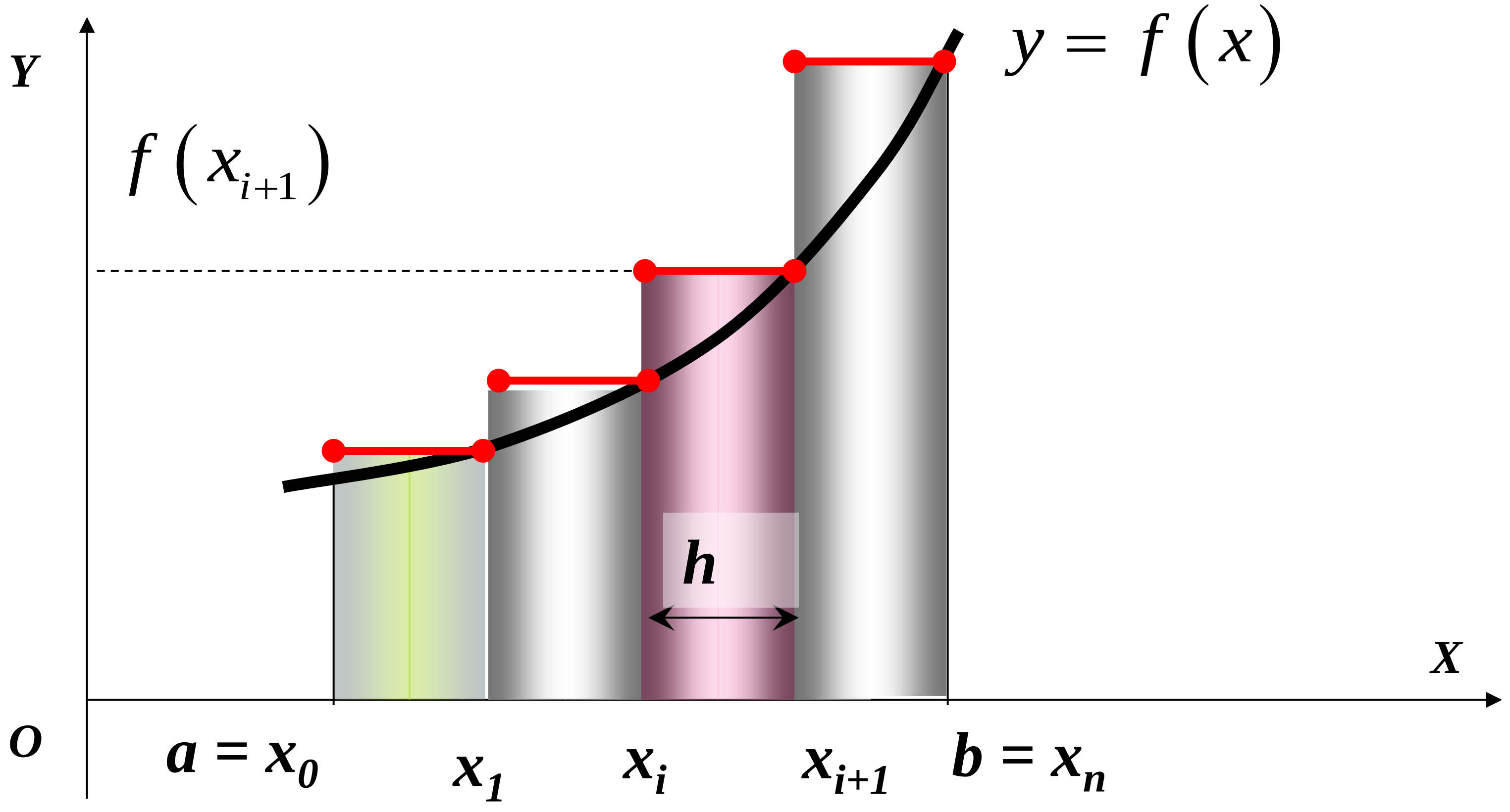
то $M_1 \dfrac{(b-a)^2}{2n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

поэтому выбираем $\boxed{n > M_1 \dfrac{(b-a)^2}{\varepsilon}}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ

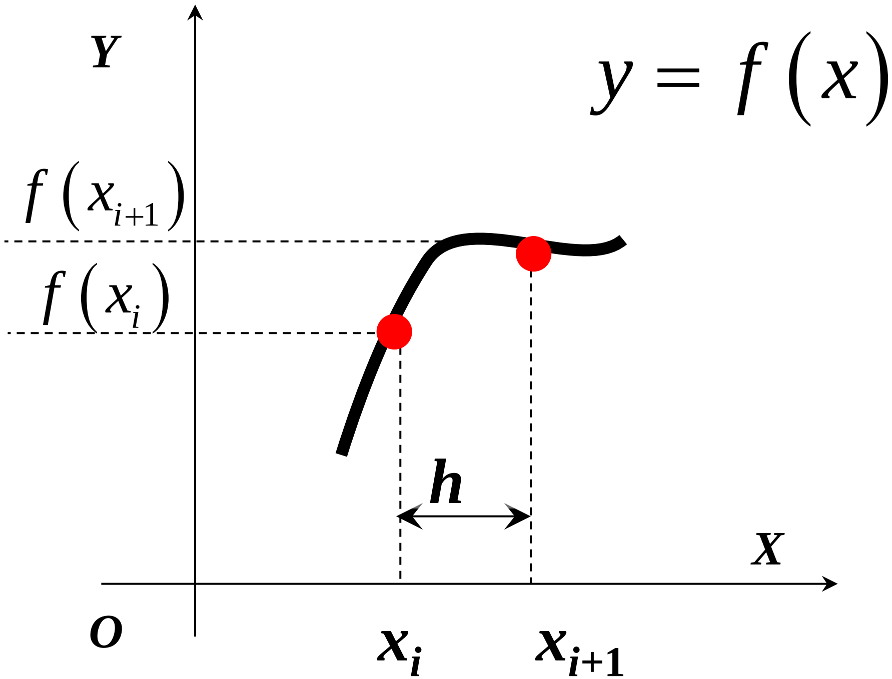


$$S_i = h \cdot f(x_i), \quad S = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = h \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$$



$$S_i = h \cdot f(x_{i+1}), \qquad S = \sum_{i=1}^{n} S_i = h \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

ФОРМУЛА ТРАПЕЦИЙ



Многочлен Ньютона для 2-х узлов (трапеция)

x_i	x_i+h
$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$

$$N_1(x) = f(x_i) + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) \cdot \frac{x - x_i}{h}$$

$$\int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx \approx \int_{x_i}^{x_i+h} N_1(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_i}^{x_i+h} \left(f(x_i) + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) \cdot \frac{x - x_i}{h} \right) dx =$$

$$= f(x_i) \int_{x_i}^{x_i+h} dx + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) \int_{x_i}^{x_i+h} \frac{x - x_i}{h}\,dx =$$

$$= f(x_i) \cdot h + \left(f(x_{i+1}) - f(x_i) \right) \cdot \left. \frac{(x - x_i)^2}{2h} \right|_{x_i}^{x_i+h} =$$

$$= f\left(x_i\right)\cdot h+\left(f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right)\cdot\left(\frac{h^2}{2h}-0\right)=$$

$$= f\left(x_i\right)\cdot h+\left(f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right)\cdot\frac{h}{2}=\frac{f\left(x_i\right)+f\left(x_{i+1}\right)}{2}\cdot h$$

$$\int_a^b f\left(x\right)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_i+h} f\left(x\right)dx=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f\left(x_i\right)+f\left(x_{i+1}\right)}{2}\cdot h$$

Формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\cdot\left(\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2}+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right)+R_n$$

Оценка погрешности формулы

$$\left|R_n\right| \le M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}$$

$$M_2 = \max_{[a;b]} \left| f''(x) \right|$$

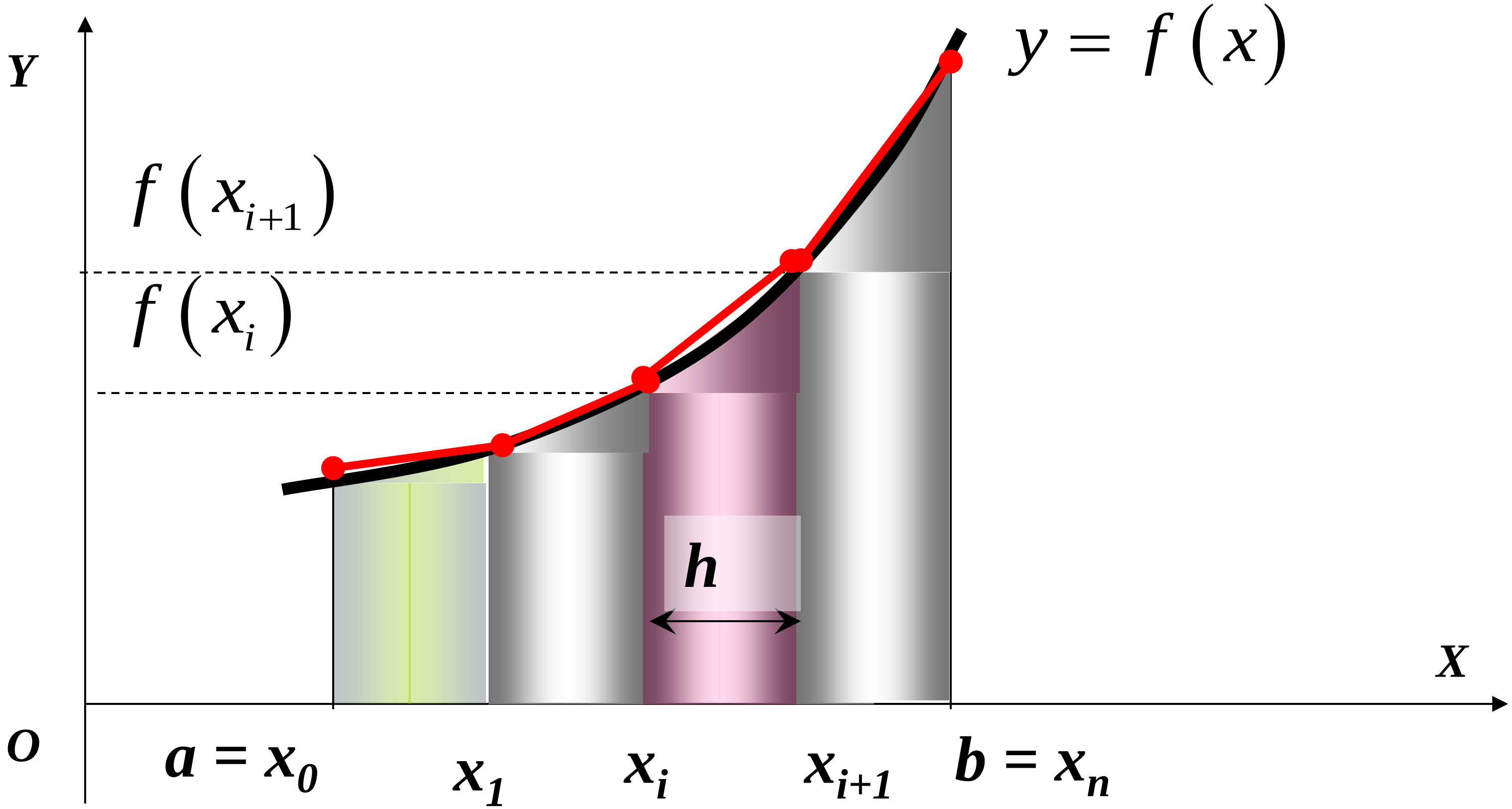
Оценка погрешности формулы

Если задана точность вычисления ε,

то $M_2 \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

поэтому выбираем $\boxed{n > \sqrt{M_2 \dfrac{(b-a)^3}{6\varepsilon}}}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ

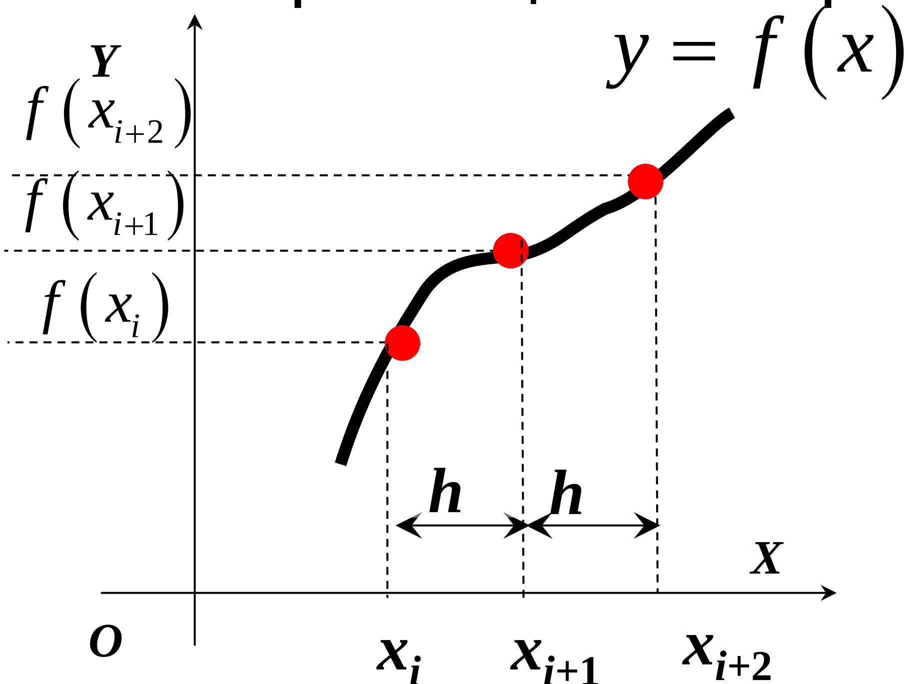


$$S_i = h \cdot \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

$$S = \sum_{i=0}^{n} S_i = h \cdot \left(\frac{f(x_0) + f(x_n)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

ФОРМУЛА СИМПСОНА

Интерполяция на отрезке [x_i;x_{i+2}]



Многочлен Ньютона для 3-х узлов

x_i	x_i+h	x_i+2h
$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	$f(x_{i+2})$

$$N_2(x) = f(x_i) + \frac{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)}{1!}\cdot\frac{x - x_i}{h} +$$

$$+\frac{\left(f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)}{2!}\cdot\frac{x - x_i}{h}\left(\frac{x - x_i}{h} - 1\right)$$

$$\int_{x_i}^{x_i+2h} f(x)\,dx \approx \int_{x_i}^{x_i+2h} N_2(x)\,dx =$$

$$= \int_{x_i}^{x_i+2h} \left(\begin{array}{l} f(x_i) + \dfrac{\left(f(x_{i+1}) - f(x_i)\right)}{1!} \cdot \dfrac{x - x_i}{h} + \\ + \dfrac{\left(f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)\right)}{2!} \cdot \dfrac{x - x_i}{h} \cdot \left(\dfrac{x - x_i}{h} - 1 \right) \end{array} \right) dx =$$

$$= f\left(x_i\right)\int_{x_i}^{x_i+2h} dx + \frac{\left(f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)\right)}{1!}\int_{x_i}^{x_i+2h} \frac{x-x_i}{h}\,dx +$$

$$+\frac{\left(f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)\right)}{2!}\int_{x_i}^{x_i+2h} \frac{x-x_i}{h}\cdot\left(\frac{x-x_i}{h}-1\right)dx =$$

$$= f\left(x_i\right)\int_{x_i}^{x_i+2h} dx + \frac{\left(f\left(x_{i+1}\right) - f\left(x_i\right)\right)}{1!}\int_{x_i}^{x_i+2h} \frac{x-x_i}{h}\,dx +$$

$$+\frac{\left(f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)\right)}{2!}\int_{x_i}^{x_i+2h} \left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 dx \; -$$

$$-\frac{\left(f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)\right)}{2!}\int_{x_i}^{x_i+2h} \frac{x-x_i}{h}\,dx =$$

$$= f\left(x_i\right)\int_{x_i}^{x_i+2h} dx +$$

$$+\left(\frac{\left(f\left(x_{i+1}\right)-f\left(x_i\right)\right)}{1!}-\frac{\left(f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)\right)}{2!}\right)\int_{x_i}^{x_i+2h}\frac{x-x_i}{h}\,dx+$$

$$+\frac{\left(f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)\right)}{2!}\int_{x_i}^{x_i+2h}\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 dx=$$

$$= f\left(x_i\right) \int_{x_i}^{x_i+2h} dx +$$

$$+ \frac{4f\left(x_{i+1}\right) - 3f\left(x_i\right) - f\left(x_{i+2}\right)}{2} \int_{x_i}^{x_i+2h} \frac{x - x_i}{h} dx +$$

$$+ \frac{f\left(x_{i+2}\right) - 2f\left(x_{i+1}\right) + f\left(x_i\right)}{2} \int_{x_i}^{x_i+2h} \left(\frac{x - x_i}{h}\right)^2 dx =$$

$$= f\left(x_i\right)\cdot 2h +$$

$$+\frac{4f\left(x_{i+1}\right)-3f\left(x_i\right)-f\left(x_{i+2}\right)}{2}\cdot\frac{\left(x-x_i\right)^2}{2h}\Bigg|_{x_i}^{x_i+2h}+$$

$$+\frac{f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}\cdot\frac{\left(x-x_i\right)^3}{3h^2}\Bigg|_{x_i}^{x_i+2h}=$$

$$= f\left(x_i\right)\cdot 2h +$$

$$+\frac{4f\left(x_{i+1}\right)-3f\left(x_i\right)-f\left(x_{i+2}\right)}{2}\cdot\frac{\left(2h\right)^2}{2h}+$$

$$+\frac{f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}\cdot\frac{\left(2h\right)^3}{3h^2}=$$

$$= f\left(x_i\right)\cdot 2h +$$

$$+\frac{4f\left(x_{i+1}\right)-3f\left(x_i\right)-f\left(x_{i+2}\right)}{2}\cdot 2h +$$

$$+\frac{f\left(x_{i+2}\right)-2f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}\cdot\frac{2}{3}h =$$

$$=\left(f\left(x_i\right)+4f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_{i+2}\right)\right)\cdot\frac{1}{3}h$$

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \sum_{i=0}^{n-2}\int_{x_i}^{x_i+2h} f\left(x\right)dx =$$

$$=\sum_{i=0}^{n-2}\left(f\left(x_i\right)+4f\left(x_{i+1}\right)+f\left(x_{i+2}\right)\right)\cdot\frac{1}{3}h$$

Формула Симпсона

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}\cdot\begin{pmatrix} f(x_0)+f(x_n) \\ +4\cdot\big(f(x_1)+f(x_3)+\cdots+f(x_{n-1})\big) \\ +2\cdot\big(f(x_2)+f(x_4)+\cdots+f(x_{n-2})\big)\end{pmatrix}+R_n$$

$$n = 2k$$

Оценка погрешности формулы

$$\left|R_n\right| \le M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}$$

$$M_4 = \max_{[a;b]}\left|f^{IV}(x)\right|$$

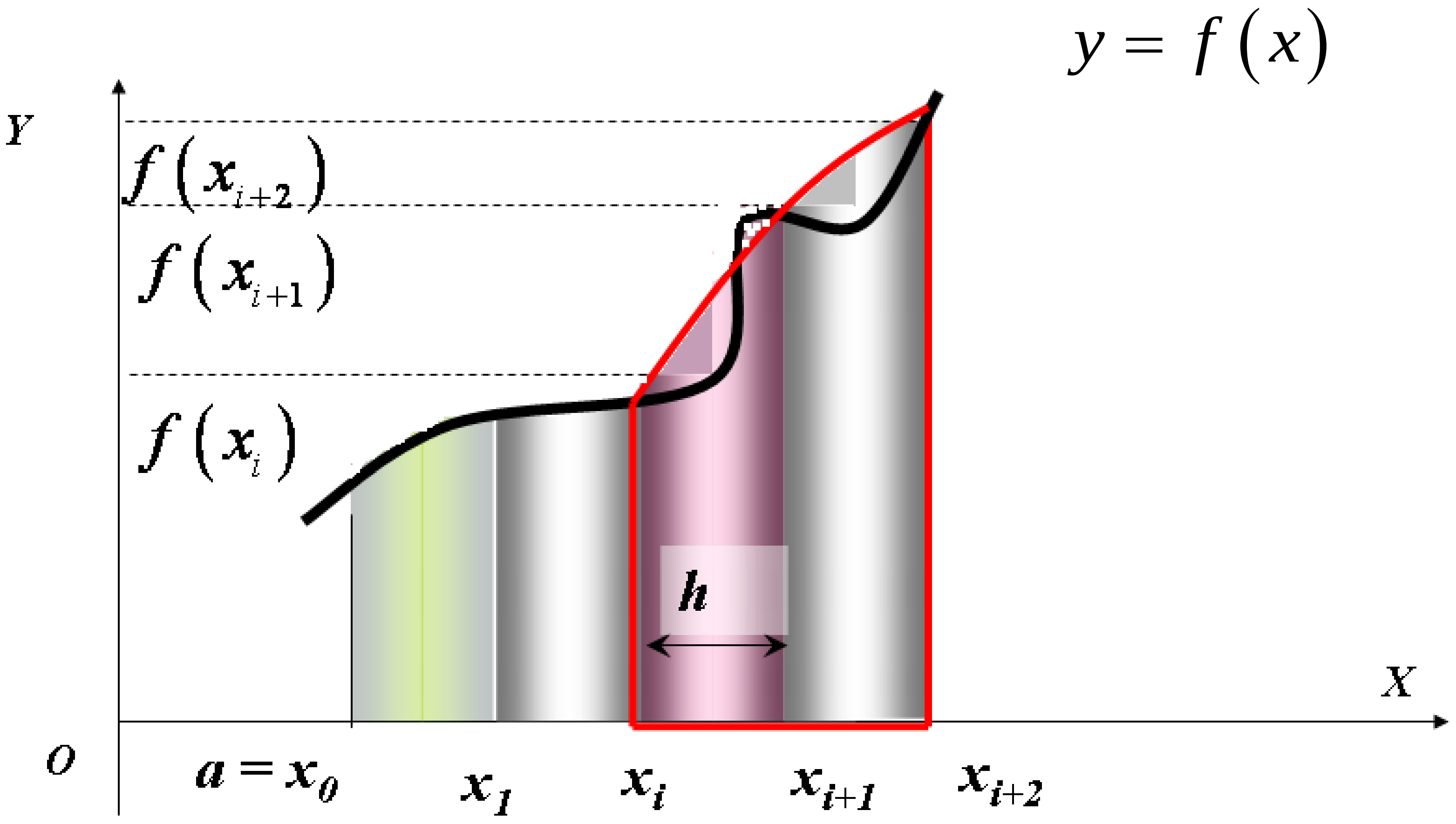
Оценка погрешности формулы

Если задана точность вычисления ε,

то $M_4 \dfrac{(b-a)^5}{180n^4} < \dfrac{\varepsilon}{2}$,

поэтому выбираем $\boxed{n > \sqrt[4]{M_4 \dfrac{(b-a)^5}{90\varepsilon}}}$

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ФОРМУЛЫ

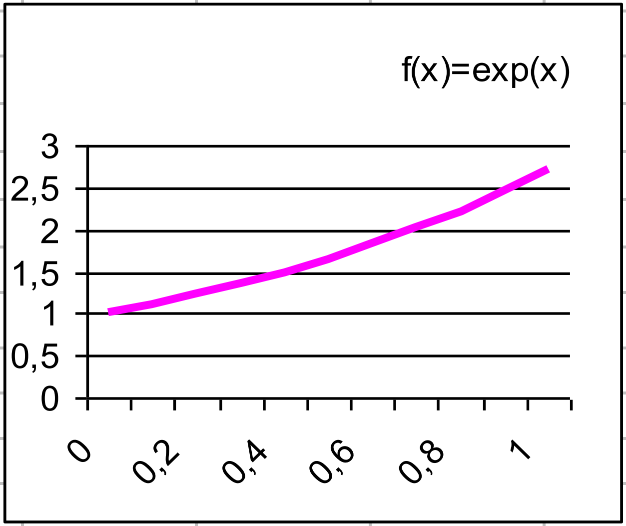


$y = f(x)$
Y
$f(x_{i+2})$
$f(x_{i+1})$
$f(x_i)$
h
X
O
$a = x_0$
x_1
x_i
x_{i+1}
x_{i+2}

h	0,1							
n	x	f(x)	f(x)	f(x)	f(x)	f(x)		f(x)
0	0	1	1			1	1	1
1	0,1	1,105171	1,105171	1,105171	1,105171		4	4,420684
2	0,2	1,221403	1,221403	1,221403	1,221403		2	2,442806
3	0,3	1,349859	1,349859	1,349859	1,349859		4	5,399435
4	0,4	1,491825	1,491825	1,491825	1,491825		2	2,983649
5	0,5	1,648721	1,648721	1,648721	1,648721		4	6,594885
6	0,6	1,822119	1,822119	1,822119	1,822119		2	3,644238
7	0,7	2,013753	2,013753	2,013753	2,013753		4	8,055011
8	0,8	2,225541	2,225541	2,225541	2,225541		2	4,451082
9	0,9	2,459603	2,459603	2,459603	2,459603		4	9,838412
10	1	2,718282		2,718282		2,718282	1	2,718282
		19,05628	16,33799	18,05628	15,33799	3,718282		51,54848

		Δ
I np	1,633799	0,084482
I np	1,805628	0,087346
I mp	1,719713	0,001432
I c	1,718283	9,53E-07

I	1,7183



И. А. МАРОН

Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах

Функции одной переменной

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов высших технических учебных заведений

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1970

§ 6.7. Приближенное вычисление определенных интегралов

1. *Формула трапеций.* Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей точками $_k = a+kh$, где $h=(b-a)/n$, $k=0, 1, \ldots, n$, и применяют формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right].$$

огрешность R этой формулы оценивается так:

$$|R| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}, \text{ где } M_2 = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|$$

предположении ограниченности второй производной).

2. *Формула Симпсона.* Отрезок $[a, b]$ разбивают на $2n$ равных частей точами $x_k=a+kh$, где $h=(b-a)/2n$, и применяют формулу

$$f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6n}\{f(x_0)+f(x_{2n})+4[f(x_1)+f(x_3)+\ldots+f(x_{2n-1})]+$$
$$+2[f(x_2)+f(x_4)+\ldots+f(x_{2n-2})]\}.$$

предположении существования и ограниченности $f^{IV}(x)$ для погрешности этой рмулы справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{180(2n)^4}, \quad \text{где} \quad M_4 = \sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f^{IV}(x)|.$$

6.7.1. Вычислить приближенно интеграл $I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$ по формуле рапеций при $n=10$.

Решение. Составим таблицу значений подынтегральной функии, причем будем вычислять ординаты $y_i=f(x_i)$ ($i=0, 1, \ldots, 10$) четырьмя знаками после запятой.

x_i	$1+x_i$	$y_i=\frac{1}{1+x_i}$	x_i	$1+x_i$	$y_i=\frac{1}{1+x_i}$
0,0000	1,0000	1,0000	0,6000	1,6000	0,6250
0,1000	1,1000	0,9091	0,7000	1,7000	0,5882
0,2000	1,2000	0,8333	0,8000	1,8000	0,5556
0,3000	1,3000	0,7692	0,9000	1,9000	0,5263
0,4000	1,4000	0,7143	1,0000	2,0000	0,5000
0,5000	1,5000	0,6667			

По формуле трапеций получим

$$=\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \approx \frac{1}{10}\left(\frac{1,0000+0,5000}{2}+0,9091+0,8333+0,7692+\right.$$
$$\left.+0,7143+0,6667+0,6250+0,5882+0,5556+0,5263\right)=$$
$$=\frac{1}{10}\cdot 6,9377 = 0,69377 \approx 0,6938.$$

Произведем оценку погрешности полученного результата. Имеем $f''(x)=2/(1+x)^3$. Так как $0\leqslant x\leqslant 1$, то $|f''(x)|\leqslant 2$. Следовательно, в качестве M_2 можно взять число 2. Отсюда находим оценку погрешности:

$$|R| \leqslant \frac{2}{12\cdot 10^2}=\frac{1}{600} < 0,0017.$$

Мы вычисляли ординаты с четырьмя знаками после запятой, при этом погрешность от округления ординат не превосходит величины $\frac{0,00005}{10}(1+9\cdot 1)=0,00005$ (а точнее, $\frac{0,00005}{10}\cdot 9 = 0,000045$, так как ординаты y_0 и y_{10} — точные числа). Таким образом, общая погрешность, возникшая от применения формулы трапеций и от округления ординат, не превосходит величины 0,0018.

Заметим, что вычисляя заданный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница, получим

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2 \approx 0,69315.$$

Таким образом, погрешность полученного результата составляет лишь 0,0007, т. е. мы получили результат с тремя верными знаками.

6.7.2. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_{0,5}^{1,5}\frac{e^{0,1x}}{x}dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Чтобы подобрать необходимое для обеспечения заданной точности число $2n$, найдем $f^{IV}(x)$. Последовательно дифференцируя $f(x)=e^{0,1x}/x$, получим

$$f^{IV}(x)=\frac{e^{0,1x}}{x^5}(0,0001x^4-0,004x^3+0,12x^2-2,4x+24)=\frac{P(x)}{x^5}e^{0,1x},$$

где $P(x)$ — многочлен, заключенный в круглых скобках. Функция $\varphi(x)=e^{0,1x}$ возрастает на отрезке $[0,5;\ 1,5]$ и поэтому достигает своего наибольшего значения при $x=1,5$: $\varphi(1,5)=e^{0,15}<1,2$. Абсолютная величина многочлена $P(x)$, деленного на x^5, оценивается сверху как сумма модулей отдельных членов. При этом наибольшее значение каждого слагаемого достигается при $x=0,5$, поэтому

$$\left|\frac{P(x)}{x^5}\right| < \frac{0,0001}{x}+\frac{0,004}{x^2}+\frac{0,12}{x^3}+\frac{2,4}{x^4}+\frac{24}{x^5}\leqslant$$
$$\leqslant 0,0002+0,016+0,96+38,4+768 < 808.$$

Таким образом, $|f^{IV}(x)|<1,2\cdot 808<1000$. Следовательно, в качестве M_4 можно взять число 1000.

Нам требуется вычислить интеграл с точностью до 0,0001. Для обеспечения такой точности необходимо, чтобы сумма ошибок метода, действий и окончательного округления не превосходила 0,0001. Для этого подберем число $2n$ (тем самым определится «шаг» h

интегрирования) так, чтобы удовлетворялось неравенство

$$|R| < \frac{1}{2}\cdot 0{,}0001 = 5\cdot 10^{-5}.$$

Решая неравенство

$$\frac{1^5\cdot 1000}{180\,(2n)^4} < 5\cdot 10^{-5},$$

получим

$$2n > 19.$$

Возьмем $2n=20$; тогда шаг h интегрирования будет равным

$$h=\frac{b-a}{2n}=\frac{1}{20}=0{,}05.$$

При более точном подсчете получается, что при $2n=20$

$$|R| < 3{,}5\cdot 10^{-6}.$$

Если мы будем подсчитывать y_i с пятью знаками после запятой, т. е. с погрешностью не более 10^{-5}, то ошибка окончательного округления будет тоже не больше 10^{-5}. Таким образом, общая ошибка будет меньше, чем $4{,}5\cdot 10^{-5} < 0{,}0001$.

Составим таблицу значений функции $y=e^{0,1x}/x$ для значений x от 0,5 до 1,5 с шагом $h=0{,}05$.

Вычисления будем вести с пятью знаками после запятой.

i	x_i	$0,1x_i$	$e^{0,1x_i}$	y_i
0	0,50	0,050	1,05127	2,10254
1	0,55	0,055	1,05654	1,92098
2	0,60	0,060	1,06184	1,76973
3	0,65	0,065	1,06716	1,64178
4	0,70	0,070	1,07251	1,53216
5	0,75	0,075	1,07788	1,43717
6	0,80	0,080	1,08329	1,35411
7	0,85	0,085	1,08872	1,28085
8	0,90	0,090	1,09417	1,21574
9	0,95	0,095	1,09966	1,15754
10	1,00	0,100	1,10517	1,10517
11	1,05	0,105	1,11071	1,05782
12	1,10	0,110	1,11628	1,01480
13	1,15	0,115	1,12187	0,97554
14	1,20	0,120	1,12750	0,93958
15	1,25	0,125	1,13315	0,90652
16	1,30	0,130	1,13883	0,87602
17	1,35	0,135	1,14454	0,84781
18	1,40	0,140	1,15027	0,82162
19	1,45	0,145	1,15604	0,79727
20	1,50	0,150	1,16183	0,77455

Сведем табличные данные для наглядности в следующий расчетный бланк:

i	x_i	y_i		
		при $i=0$ и $i=20$	при i нечетном	при i четном
0	0,50	2,10254		
1	0,55		1,92098	
2	0,60			1,76973
3	0,65		1,64178	
4	0,70			1,53216
5	0,75		1,43717	
6	0,80			1,35411
7	0,85		1,28085	
8	0,90			1,21574
9	0,95		1,15754	
10	1,00			1,10517
11	1,05		1,05782	
12	1,10			1,01480
13	1,15		0,97554	
14	1,20			0,93958
15	1,25		0,90652	
16	1,30			0,87602
17	1,35		0,84781	
18	1,40			0,82162
19	1,45		0,79727	
20	1,50	0,77455		
	Суммы	2,87709	12,02328	10,62893

Применяя формулу Симпсона, получим

$$\int\limits_{0,5}^{1,5}\frac{e^{0,1x}}{x}\,dx \approx \frac{1}{60}(2{,}87709+4\cdot 12{,}02328+2\cdot 10{,}62893)=$$

$$=\frac{1}{60}\cdot 72{,}22807=1{,}2038.$$

6.7.3. Ширина реки 26 *м*; промеры глубины в поперечном сечении реки через каждые 2 *м* дали следующие результаты:

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26
y	0,3	0,9	1,7	2,1	2,8	3,4	3,3	3,0	3,5	2,9	1,7	1,2	0,8	0,6

где x означает расстояние от одного берега, а y — соответствующую глубину (в метрах). Зная, что средняя скорость течения 1,3 *м/сек*, определить секундный расход Q воды в реке.

Решение. По формуле трапеций площадь S поперечного сечения

$$S=\int_0^{26} y\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2}(0,3+0,6)+0,9+1,7+2,1+2,8+3,4+3,3+\right.$$

$$\left.+3,0+3,5+2,9+1,7+1,2+0,8\right]=55,5\ (м^2).$$

Отсюда секундный расход

$$Q=55,5\cdot 1,3\approx 72\ (м^3/сек).$$

Оценить погрешность точно здесь нельзя. Некоторые косвенные методы оценок, приводимые в руководствах по численным методам, позволяют указать приближенно порядок погрешности. Погрешность S составляет примерно 3 $м^2$, значит, погрешность Q составляет примерно 4 $м^3/сек$.

6.7.4. Вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле Симпсона;

б) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001 по формуле трапеций.

6.7.5. По формуле Симпсона вычислить приближенное значение интеграла

$$I=\int_{1,05}^{1,36} f(x)\,dx,$$

если подынтегральная функция задана следующей таблицей:

x	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,35
$f(x)$	2,36	2,50	2,74	3,04	3,46	3,98	4,6