ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

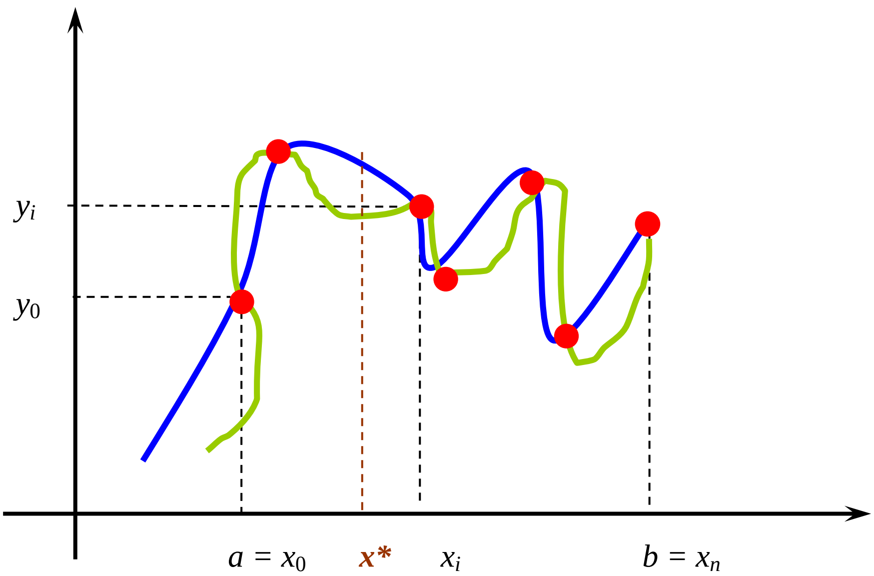
Дано: точки наблюдения (x_i, y_i) $i=\overline{0,n}$ (их количество n + 1), $[a;b]=[x_0;x_n]$.

x	x_0	x_1	x_2	…	x_n
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Найти функцию $F(x)$: $\forall i=\overline{0,n}$: $F(x_i)=y_i$.

Определение. Точки (x_i, y_i), $i=\overline{0,n}$, называются *узлами интерполяции*.

Графическая интерпретация задачи: требуется найти уравнение кривой, которая бы проходила через все узлы интерполяции (x_i, y_i).



Определение. Задача нахождения значения интерполяционной функции $F(x)$ в точке x^*, не совпадающей ни с одной абсциссой интерполяционных узлов (x_i, y_i), но принадлежащей интерполяционному отрезку $[x_0;x_n]$, называется *задачей интерполяции*: $F(x^*)=?,\ x^*\in[x_0;x_n],\ x^*\neq x_i,\ \forall i=\overline{0,n}$.

Определение. Задача нахождения значения интерполяционной функции $F(x)$ в точке x^*, не принадлежащей интерполяционному отрезку $[x_0;x_n]$, называется *задачей экстраполяции*: $F(x^*)=?,\ x^*\notin[x_0;x_n]$.

Задача интерполяции становится однозначной, т.е. поиск единственной кривой, если в качестве интерполяционной функции $F(x)$ искать многочлен $P_n(x)$.

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ КАНОНИЧЕСКИМ МНОГОЧЛЕНОМ

Определение. Канонический многочлен переменной x степени n:

$$P_n\left(x\right) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где $a_i = \text{const}$, $i = \overline{0,n}$ - коэффициенты многочлена.

Многочлен второй степени – квадратный трехчлен: $P_2\left(x\right) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Многочлен первой степени – линейная функция: $P_1\left(x\right) = a_1 x + a_0$

Многочлен нулевой степени – число: $P_0\left(x\right) = a_0$

Задача интерполяции: найти функцию $F\left(x\right)$: $\forall i = \overline{0,n}$: $F\left(x_i\right) = y_i$ и вычислить $F\left(x^*\right)$, $x^* \in \left(x_0; x_n\right)$, $x^* \neq x_i$,

Решение

Пусть искомая функция – многочлен степени n: $F\left(x\right) \equiv P_n\left(x\right)$. Тогда $\forall i = \overline{0,n}$, $P_n\left(x_i\right) = y_i$:

$$\begin{cases} P_n\left(x_0\right) & = & y_0, \\ P_n\left(x_1\right) & = & y_1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ P_n\left(x_n\right) & = & y_n, \end{cases}, \quad \begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 & = & y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1}x_1^{n-1} + \ldots + a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 & = & y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1}x_n^{n-1} + \ldots + a_2 x_n^2 + a_1 x_n + a_0 & = & y_n, \end{cases}.$$

Из последней системы однозначно определяются коэффициенты a_i канонического многочлена.

В матричной форме система для определения коэффициентов канонического многочлена имеет вид:

$$XA = Y.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \ldots & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \ldots & x_1^2 & x_1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \ldots & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы X всегда будет отличен от нуля! Система имеет единственное решение

$$A = X^{-1}Y.$$

Пример

Даны узлы интерполяции:

Найти $y(1)$.

n	0	1	2
x	-1	0	2
y	8	3	-1

Решение

Поскольку число узлов равно трём, степень интерполяционного канонического многочлена будет на единицу меньше, чем число узлов, т.е. 2: $P_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Остаётся найти коэффициенты a_2, a_1, a_0.

$$\begin{cases} P_2(x_0) = y_0, \\ P_2(x_1) = y_1, \\ P_2(x_2) = y_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_2(-1) = 8, \\ P_2(0) = 3, \\ P_2(2) = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 \cdot (-1)^2 + a_1 \cdot (-1) + a_0 = 8, \\ a_2 \cdot 0^2 + a_1 \cdot 0^1 + a_0 = 3, \\ a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 = -1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a_0 = 3, \\ a_1 = -4, \\ a_2 = 1 \end{cases}$$

Многочлен имеет вид: $P_2(x) = x^2 - 4x + 3$

$$y(1) = P_2(1) = 1^2 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$$

Задание 4.1 из типового расчёта №2

Функция $y = f(x)$ задана таблично. Вычислить приближённое значение $y^* = f(x^*)$, используя интерполяцию каноническим многочленом.

x	1	2	3	4	5	x*
y	0,1	2,8	2,3	4,5	5,3	2,8

Коэффициенты полученного канонического многочлена проверить, построив полиномиальный тренд по заданным точкам, указав его уравнение на диаграмме в MS Excel.

Решение

Даны 5 узлов интерполяции. Степень интерполяционного многочлена будет равна четырём (число узлов минус единица!). Требуется определить коэффициенты a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 многочлена $P_4(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Система для определения коэффициентов многочлена имеет вид:

$$\begin{cases} P_4(x_0) &= y_0, \\ P_4(x_1) &= y_1, \\ P_4(x_2) &= y_2, \\ P_4(x_3) &= y_3, \\ P_4(x_4) &= y_4 \end{cases}$$ или, в матричной форме: $X \cdot A = Y$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_0^4 & x_0^3 & x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^4 & x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^4 & x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ x_3^4 & x_3^3 & x_3^2 & x_3 & 1 \\ x_4^4 & x_4^3 & x_4^2 & x_4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Отсюда, подставляя данные узлов,

$$X = \begin{pmatrix} 1^4 & 1^3 & 1^2 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^4 & 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 5^4 & 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 81 & 27 & 9 & 3 & 1 \\ 256 & 64 & 16 & 4 & 1 \\ 625 & 125 & 25 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 2,8 \\ 2,3 \\ 4,5 \\ 5,3 \end{pmatrix}.$$

Определение вектора A производится с помощью обратной матрицы, $A = X^{-1} \cdot Y$, в MS Excel:

	1	1	1	1	1		0,1
	16	8	4	2	1		2,8
X	81	27	9	3	1	Y	2,3
	256	64	16	4	1		4,5
	625	125	25	5	1		5,3

	0,041666667	-0,166666667	0,25	-0,166666667	0,041666667		-0,416666667
X^{-1}	-0,583333333	2,166666667	-3	1,833333333	-0,416666667	A	5,15
	2,958333333	-9,833333333	12,25	-6,833333333	1,458333333		-22,08333333
	-6,416666667	17,83333333	-19,5	10,16666667	-2,083333333		39,15
	5	-10	10	-5	1		-21,7

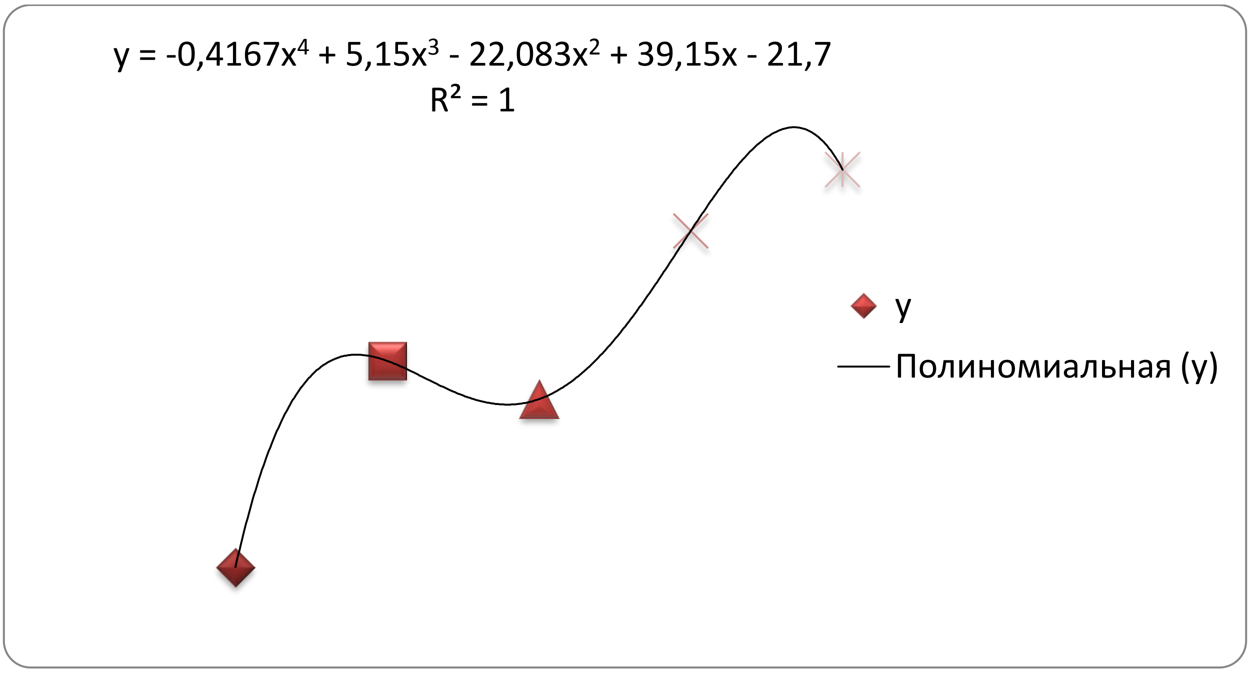
Искомый многочлен: $P_4(x) = -0,417x^4 + 5,15x^3 - 22,083x^2 + 39,5x \; - 21,7$.

Значение многочлена в точке x^* = 2,8:
$P_4(6,3) = -0,417 \cdot 2,8^4 + 5,15 \cdot 2,8^3 - 22,083 \cdot 2,8^2 + 39,5 \cdot 2,8 \; - 21,7 = 2,229$.

Построение полиномиального тренда по заданным точкам, с указанием его уравнения на диаграмме в MS Excel (известно из 1-го семестра):

1. Построить точечную диаграмму.

2. Добавить линию тренда: полиномиальную, степени на единицу меньше, чем количество точек (в данном примере – степени 4).
3. Поместить на диаграмму уравнение линии тренда и коэффициент аппроксимации.



ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНОМ ЛАГРАНЖА

Задача интерполяции – всё та же:

Задача интерполяции: найти функцию $F(x)$: $\forall i=\overline{0,n}$: $F(x_i)=y_i$ и вычислить $F(x^*)$, $x^*\in[x_0;x_n]$, $x^*\neq x_i$.

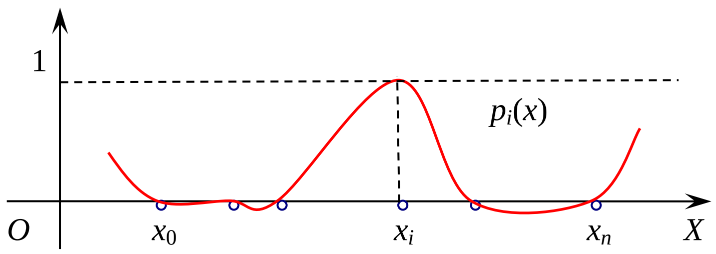
Однако, в качестве интерполяционной функции $F(x)$ ищется многочлен, представленный в виде линейной комбинации коэффициентов, зависящих от x, и значений y_i:

$$F(x)\equiv L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_n^i(x)\,y_i$$

Вспомогательная задача:

Найти многочлены $p^i(x)$, $i=\overline{0,n}$:, такие, что $p^i(x_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0 & i\neq j.\end{cases}$.

Корнями многочленов $p^i(x)$ являются все абсциссы x_j интерполяционных узлов, по номеру не совпадающих с номером i многочлена. Это означает, что график многочлена $p^i(x)$ пересекает ось OX в точках x_j, $j\neq i$. В точках, совпадающих с абсциссами интерполяционных узлов, многочлены, имеющие одинаковый номер с узлом, равны единице.



Все корни многочлена $p^i(x)$ известны, поэтому, согласно основной теореме алгебры, многочлен $p^i(x)$ разлагается на произведение степеней простых сомножителей:

$$p_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n).$$

Поскольку $p_i(x_i)=1$,

$$1=p_i(x_i)=c_i(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n),$$

$$c_i=\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

После подстановки коэффициента c_i в многочлен $p^i(x)$:

$$p_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Построенные многочлены используются для представления интерполяционного многочлена в виде линейной комбинации коэффициентов, зависящих от x, и значений y_i в узлах интерполяции:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x)\,y_i.$$

$$L_n(x_j)=\sum_{i=0}^{n} p_i(x_j)\,y_i=\sum_{i=0}^{n}\delta_{ij}\,y_i=y_j.$$

$$p_i(x)=L_n^i(x)$$

Определение. $L_n^i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$ - Лагранжевы коэффициенты.

Определение. Интерполяционный многочлен Лагранжа для $n+1$ узла:

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} L_n^i(x)\,y_i,$$

или,

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\cdot y_i$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для 3 узлов:

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\cdot y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\cdot y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\cdot y_2$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа для 2 узлов:

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

$$(x-x_0)(x-x_1)$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}\cdot y_0+\frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}\cdot y_1$$

Пример
Задание 4.2 а) из Типового расчёта №2

n	0	1	2
x	-1	0	2
y	8	3	-1

$y(1)-?$

Решение

$$(x+1)(x-0)(x-2)$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)}\cdot 8+\frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)}\cdot 3+\frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)}\cdot(-1)=x^2-4x+3$$

Ответ. $y(1)=L_2(1)=0$

Нахождение значения интерполяционного многочлена Лагранжа в точке $x^* \neq x_i$, без его построения

Значение интерполяционного многочлена Лагранжа в точке $x^* \neq x_i$ можно представить в виде:

$$L_n(x^*)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x^*-x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_{i-1})(x^*-x_i)(x^*-x_{i+1})\ldots(x^*-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x^*-x_i)(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\cdot y_i\ .$$

Числитель дроби, стоящей под знаком суммы, выносится, поскольку не зависит от индекса суммирования и является константой:

$$L_n(x^*)=(x^*-x_0)(x^*-x_1)\ldots(x^*-x_{i-1})(x^*-x_i)(x^*-x_{i+1})\ldots(x^*-x_n)\times$$
$$\times\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x^*-x_i)(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}\cdot y_i\ .$$

Тогда значения многочлена Лагранжа в точке $x^* \neq x_i$, без его построения, примет вид:

$$L_n(x^*)=\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i(x^*)},$$

где $D_i(x^*)=(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x^*-x_i)(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)$.

Алгоритм нахождения значения интерполяционного многочлена Лагранжа в точке $x^* \neq x_i$, без его построения

Шаг 1

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_0 & \dots & x_0 \\ x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & \dots & x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* & x_0 & \dots & x_0 \\ x_1 & x^* & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & \dots & x^* \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\begin{bmatrix} x^* & x_0 & \dots & x_0 \\ x_1 & x^* & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_n & \dots & x^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^* - x_0 & x_0 - x_1 & \dots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x^* - x_1 & \dots & x_1 - x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & \dots & x^* - x_n \end{bmatrix}$$

Шаг 3

$$\begin{bmatrix} x^* - x_0 & x_0 - x_1 & \dots & x_0 - x_n \\ x_1 - x_0 & x^* - x_1 & \dots & x_1 - x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n - x_0 & x_n - x_1 & \dots & x^* - x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} D_0 = (x^* - x_0)\cdot(x_0 - x_1)\dots(x_0 - x_n) \\ D_1 = (x_1 - x_0)\cdot(x^* - x_1)\dots(x_1 - x_n) \\ \dots \\ D_n = (x_n - x_0)\cdot(x_n - x_1)\dots(x^* - x_n) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y_0/D_0 \\ y_1/D_1 \\ \dots \\ y_n/D_n \end{bmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\prod_{i=0}^{n}\left(x^* - x_i\right) \qquad\qquad \sum_{i=0}^{n} y_i/D_i$$

Шаг 4

$$L_n\left(x^*\right) = \prod_{i=0}^{n}\left(x^* - x_i\right)\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{y_i}{D_i\left(x^*\right)}.$$

Пример
Задание 4.2 а) из Типового расчёта №2

n	0	1	2
x	-1	0	2
y	8	3	-1

$y(1) - ?$

Решение

$L_2(1)$ -?

Шаг 1

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Шаг 2

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Шаг 3

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} D_1 = 2\cdot(-1)\cdot(-3) = 6 \\ D_2 = 1\cdot 1\cdot 2 = -2 \\ D_3 = 3\cdot 2\cdot(-1) = -6 \end{bmatrix} \to \frac{y_i}{D_i} = \begin{bmatrix} 8/6 \\ 3/(-2) \\ (-1)/(-6) \end{bmatrix}$$

$$\Pi = 2\cdot 1\cdot(-1) = -2 \qquad \Sigma = 8/6 - 3/2 + 1/6 = 0$$

Шаг 4

$$L_2(1) = \prod_{i=0}^{2}(1 - x_i)\cdot\sum_{i=0}^{2}\frac{y_i}{D_i(1)} = (-2)\cdot 3 = -6$$

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ С ПОСТОЯННЫМ ШАГОМ (ПО НЬЮТОНУ)

Задача интерполяции – всё та же:

Интерполяционные узлы равноотстоят друг от друга, $\forall i=\overline{0,n}:\ x_i = x_0 + i\cdot h$ (дана интерполяционная таблица с шагом h).

x	x_0	$x_1 = x_0 + h$	$x_2 = x_0 + 2h$	…	$x_n = x_0 + nh$
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Задача интерполяции: найти функцию $F(x)$: $F(x_i) = y_i$ и вычислить $F(x^*)$, $x^* \in [x_0; x_n]$, $x^* \neq x_i$.

В качестве интерполяционной функции ищется многочлен.

В случае таблиц с равноотстоящими узлами используются величины, называемые конечными разностями. Конечные разности первого порядка – это разности между соседними табличными значениями. Разности второго порядка – это разности между соседними разностями первого порядка, и т.д..

$$\begin{array}{llll}
\Delta y_0 = y_1 - y_0, & \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, & & \Delta^n y_0 = \Delta^{n-1} y_1 - \Delta^{n-1} y_0, \\
\Delta y_1 = y_2 - y_1, & \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, & \ldots\ldots & \Delta^n y_1 = \Delta^{n-1} y_2 - \Delta^{n-1} y_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}, & \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1}, & & \Delta^n y_{n-1} = \Delta^{n-1} y_n - \Delta^{n-1} y_{n-1},
\end{array}$$

Определение. Первый интерполяционный многочлен Ньютона для $n+1$ узла:

$$N_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right) + . + \frac{\Delta^n y_0}{n!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)\ldots\left(\frac{x-x_0}{h}-(n-1)\right)$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для 3 узлов:

$$N_2(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)$$

Первый интерполяционный многочлен Ньютона для 2 узлов:

$$N_1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h}$$

Задача
Задание 4.2 б) из Типового расчёта №2

n	0	1	2
x	2	4	6
y	-1	3	15

$y(1)-?$

$$N_2(x)=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}\cdot\frac{x-x_0}{h}+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}\cdot\frac{x-x_0}{h}\cdot\left(\frac{x-x_0}{h}-1\right)$$

$h=2$, $\frac{x-x_0}{h}=\frac{x-2}{2}$.

Вычисляются конечные разности:

n	**y**	**Δ y**	**Δ² y**
0	-1	4	8
1	3	12	
2	15		

$$N_2(x)=-1+\frac{4}{1!}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{4}{2!}\cdot\frac{x-2}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}-1\right)$$

Оценка погрешности полиномиальной интерполяции

Теорема. Для функции $y=f(x)\in C^{n+1}_{[a;b]}$, заданной таблично значениями $(x_i, y_i=f(x_i))$, $i=\overline{0,n}$, представленной интерполяционным многочленом $P_n(x)$, существует точка $c\in(a;b)$, такая, что

$$f(x)-P_n(x)=R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Определение. За абсолютную погрешность приближения значения функции $y=f(x)$ в точке x^* интерполяционным многочленом $P_n(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимается значение

$$\left|f(x)-P_n(x)\right|=\Delta_{P_n(x)},$$

где

$$\Delta_{P_n(x)}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}(x^*-x_i)\right|,\ M_{n+1}=\max_{[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Задача
Задание 4.2 а) из Типового расчёта №2

Дана таблица значений функции $y = \sin x$ с верными цифрами. Оценить точность вычисления $y(0,7)$ с помощью интерполяционного многочлена.

x	$y = \sin x$
0	0
0,5	0,5
1,0	0,8
1,5	1,0

Решение

Интерполяционный многочлен будет иметь степень 3 (число узлов минус 1), $n = 3$.

Значение интерполяционного многочлена ищется без его построения согласно вышеприведённому алгоритму с применением электронных таблиц MS Excel.

x	y
0	0
0,5	0,5
1	0,8
1,5	1

$x^* =$ 0,7

Шаг 1-2

0	0	0	0		0					0,7					0	0,5	1	1,5
0,5	0,5	0,5	0,5	-		0,5			+		0,7			-	0	0,5	1	1,5
1	1	1	1				1					0,7			0	0,5	1	1,5
1,5	1,5	1,5	1,5					1,5					0,7		0	0,5	1	1,5

Шаг 3

					D		y / D
0,7	-0,5	-1	-1,5		-0,525		0,00
0,5	**0,2**	-0,5	-1		0,05		10,00
1	0,5	**-0,3**	-0,5		0,075		10,67
1,5	1	0,5	**-0,8**		-0,6		-1,67
		П =	0,0336			**Σ =**	19

Шаг 4

y (0,7) = 0,6384

Оценка погрешности:

$$M_{n+1}=\max_{[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|,\ M_4=\max_{[0;1,5]}\left|\sin^{(4)}x\right|=1,$$

$$\Delta_{P_n(x)}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(x^*-x_i\right)\right|,$$

$$\Delta_{P_3(x)}=\frac{M_4}{4!}\cdot\left|\prod_{i=0}^{4}\left(0,7-x_i\right)\right|=\frac{1}{4!}\cdot\left|(0,7-0)(0,7-0,5)(0,7-1,0)(0,7-1,5)\right|=\frac{1}{24}\cdot 0,0336=0,0014$$

Ответ. $\Delta_{P_3(x)}=0,0014$.

Определение. За абсолютную погрешность приближения значения функции $y=f(x)$ в точке x^* первым интерполяционным многочленом Ньютона $N_n(x)$ на отрезке $[a;b]$ принимается значение

$$\left|f(x)-N_n(x)\right|=\Delta_{N_n(x)},$$

где

$$\Delta_{N_n(x)}=\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot h^{n+1}\left|\prod_{i=0}^{n}\left(\frac{x^*-x_0}{h}-i\right)\right|,\ M_{n+1}=\max_{[a;b]}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

Задача
Задание 4.2 б) из Типового расчёта №2

Дана таблица значений функции $y=\ln x$ с верными значащими цифрами. Оценить погрешность вычисления $y(1,64)$ с помощью первого интерполяционного многочлена Ньютона.

x	$y=\ln x$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
1,5	0,405	0,065	-0,004	$-2{,}220\cdot10^{-16}$	0,001
1,6	0,470	0,061	-0,004	0,001	
1,7	0,531	0,057	-0,003		
1,8	0,588	0,054			
1,9	0,642				

Решение

Поскольку узлы интерполяции равноотстоят друг от друга, в качестве интерполяционного многочлена можно взять первый интерполяционный многочлен Лагранжа четвёртой степени:

$$N_4(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!} \cdot \frac{x - x_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right) +$$
$$+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right) + \frac{\Delta^4 y_0}{4!} \cdot \frac{x - x_0}{h} \cdot \left(\frac{x - x_0}{h} - 1 \right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 2 \right)\left(\frac{x - x_0}{h} - 3 \right)$$

$h = 0{,}1$, $\frac{x - x_0}{h} = \frac{x - 1{,}5}{0{,}1} = 10x - 15$.

$$N_4(x) = 0{,}405 + \frac{0{,}065}{1!} \cdot (10x - 15) + \frac{-0{,}004}{2!} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 15 - 1) +$$
$$+ \frac{-2{,}220 \cdot 10^{-16}}{3!} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 15 - 1) \cdot (10x - 15 - 2) +$$
$$+ \frac{0{,}001}{4!} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 15 - 1) \cdot (10x - 15 - 2) \cdot (10x - 15 - 3).$$

$$N_4(x) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot (10x - 15) - \frac{0{,}004}{2} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) +$$
$$- \frac{2{,}220 \cdot 10^{-16}}{6} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) \cdot (10x - 17) +$$
$$+ \frac{0{,}001}{24} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) \cdot (10x - 17) \cdot (10x - 18).$$

$$N_4(x) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot (10x - 15) - 0{,}002 \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) +$$
$$-3{,}701 \cdot 10^{-17} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) \cdot (10x - 17) +$$
$$+4{,}167 \cdot 10^{-5} \cdot (10x - 15) \cdot (10x - 16) \cdot (10x - 17) \cdot (10x - 18).$$

Определяется значение интерполяционного многочлена в точке $x^* = 1{,}64$:

$$N_4(1{,}64) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 15) - 0{,}002 \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 15) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 16) +$$
$$-3{,}701 \cdot 10^{-17} \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 15) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 16) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 17) +$$
$$+4{,}167 \cdot 10^{-5} \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 15) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 16) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 17) \cdot (10 \cdot 1{,}64 - 18).$$

$$N_4(1{,}64) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot (16{,}4 - 15) - 0{,}002 \cdot (16{,}4 - 15) \cdot (16{,}4 - 16) +$$
$$-3{,}701 \cdot 10^{-17} \cdot (16{,}4 - 15) \cdot (16{,}4 - 16) \cdot (16{,}4 - 17) +$$
$$+4{,}167 \cdot 10^{-5} \cdot (16{,}4 - 15) \cdot (16{,}4 - 16) \cdot (16{,}4 - 17) \cdot (16{,}4 - 18).$$

$$N_4(1{,}64) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot 1{,}4 - 0{,}002 \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}4 +$$
$$-3{,}701 \cdot 10^{-17} \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot (-0{,}6) + 4{,}167 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}4 \cdot 0{,}4(-0{,}6) \cdot (-1{,}6).$$

$$N_4(1{,}64) = 0{,}405 + 0{,}065 \cdot 1{,}4 - 0{,}002 \cdot 0{,}56 - 3{,}701 \cdot 10^{-17} \cdot (-0{,}336) + 4{,}167 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}5376 = 0{,}496.$$

Оценка погрешности:

$$M_{n+1} = \max_{[a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|, \; M_5 = \max_{[1,5;1,9]} \left| \ln^{(5)} x \right| = \max_{[1,5;1,9]} \frac{24}{x^5} = \frac{24}{x^5} \bigg|_{x=1,5} = \frac{24}{1,5^5} = 3,160494,$$

$$\Delta_{N_n(x)} = \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot h^{n+1} \left| \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{x^* - x_0}{h} - i \right) \right|,$$

$$\Delta_{N_4(x)} = \frac{M_5}{5!} \cdot h^5 \left| \prod_{i=0}^{4} \left(10x^* - 15 - i \right) \right| = \frac{3,160494}{120} \cdot 0,1^5 \left| \prod_{i=0}^{4} \left(10 \cdot 1,64 - 15 - i \right) \right| =$$

$$= 0,026337 \cdot 10^{-5} \cdot \left| \prod_{i=0}^{4} \left(-4,36 - i \right) \right| =$$

$$= 0,026337 \cdot 10^{-5} \cdot \left| (-4,36) \cdot (-4,36-1) \cdot (-4,36-2)(-4,36-3)(-4,36-4) \right| =$$

$$= 0,026337 \cdot 10^{-5} \cdot \left| -9145,18 \right| = 0,00241 \approx 0,002$$

Ответ. $y(1,64) = 0,496 \pm 0,002$

ФОРМУЛА ЛИНЕЙНОГО ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ

Имеется таблица значений функции $y=f(x)$ с постоянным шагом $h>0$: $\forall i=\overline{0,n}$: $x_i=x_0+i\cdot h$.

x	x_0	$x_1=x_0+h$	$x_2=x_0+2h$	…	$x_n=x_0+nh$
y	y_0	y_1	y_2	…	y_n

Задача линейной интерполяции. Для $x^*\in(x_i;x_{i+1})$, $x^*\neq x_i$, $i=\overline{0,n}$, найти функцию $F(x):F(x_i)=y_i$, $F(x_{i+1})=y_{i+1}$, и вычислить $F(x^*)$.

В качестве интерполяционной функции на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ ищется интерполяционный многочлен Ньютона первого порядка:

$$N_1(x)=y_i+\frac{\Delta y_i}{1!}\cdot\frac{x-x_i}{h}.$$

Определение. За абсолютную погрешность приближения значения функции $y=f(x)\in C^2_{[a;b]}$ в точке $x^*\in(x_i;x_{i+1})$ интерполяционным многочленом Ньютона первого порядка $N_1(x)$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ принимается значение

$$\left|f(x)-N_1(x)\right|=\Delta_{N_1(x)},$$

где

$$\Delta_{N_1(x)}=\frac{1}{8}\cdot M_2h^2,\ M_2=\max_{[x_i;x_{i+1}]}\left|f^{(2)}(x)\right|.$$

Поскольку $\Delta^2y_i\approx f''(x_i)\cdot h^2$, $M_2\approx\left|f^{(2)}(x_i)\right|$, за абсолютную погрешность приближения значения функции $y=f(x)$ в точке $x^*\in(x_i;x_{i+1})$ интерполяционным многочленом Ньютона первого порядка $N_1(x)$ на отрезке $[x_i;x_{i+1}]$ можно принять значение

$$\Delta_{N_1(x)}=\frac{1}{8}\cdot\left|\Delta^2y_i\right|.$$

Задача.
Задание 4.2 в) из Типового расчёта №2

Вычислить приближённые значения функции $y = \sin x$ по заданной таблице с помощью линейной интерполяции в точках $x^* = 1{,}11$.

x	$y = \sin x$
1	0,841
1,1	0,891
1,2	0,933
1,3	0,964

Решение

Составляется таблица конечных разностей:

n	x	$y = \sin x$	Δy	$\Delta^2 y$
0	1	0,841	0,05	-0,008
1	1,1	0,891	0,042	-0,011
2	1,2	0,933	0,031	
3	1,3	0,964		

Поскольку $x^* \in (x_1; x_2)$, за отрезок линейной интерполяции принимается отрезок $[x_1; x_2] = [1{,}1; 1{,}2]$.

$$N_1(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{1!} \cdot \frac{x - x_1}{h},$$

$h = x_2 - x_1 = 1{,}2 - 1{,}1 = 0{,}1$, $y_1 = 0{,}891$, $\Delta y_1 = 0{,}042$.

$$N_1(x) = 0{,}891 + \frac{0{,}042}{1!} \cdot \frac{x - 1{,}1}{0{,}1} = 0{,}891 + 0{,}042 \cdot (10x - 11) = 0{,}42 \cdot x + 0{,}429$$

$$N_1(x^*) = 0{,}42 \cdot x^* + 0{,}429$$

$$N_1(1{,}11) = 0{,}42 \cdot 1{,}11 + 0{,}429 = 0{,}8952$$

$$\Delta_{N_1(x)} = \frac{1}{8} \cdot M_2 h^2, \; M_2 = \max_{[x_i; x_{i+1}]} \left| f^{(2)}(x) \right|.$$

$$M_2 = \max_{[1{,}1;1{,}2]} \left| \sin^{(2)} x \right| = \max_{[1{,}1;1{,}2]} \left| \sin x \right| = \sin 1{,}2 = 0{,}933$$

$$\Delta_{N_1(x)} = \frac{1}{8} \cdot 0{,}933 \cdot 0{,}1^2 = 0{,}001166 \approx 0{,}0012$$

$$\Delta_{N_1(x)} = \frac{1}{8} \cdot \left|\Delta^2 y_1\right|, \; \Delta^2 y_1 = -0,011.$$

$$\Delta_{N_1(x)} = \frac{1}{8} \cdot |-0,011| = 0,001375 \approx 0,0014$$

Ответ. $y(1,11) = 0,8952 \pm 0,002$